

ЕВРОПЕЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ  
 в Санкт-Петербурге  
Факультет экономики

*С. Л. Печерский, А. А. Беляева*

# **Теория игр для экономистов**

Вводный курс

*Учебное пособие*

Санкт-Петербург  
2001

*С. Л. Печерский, А. А. Беляева. Теория игр для экономистов. Вводный курс. Учебное пособие. — СПб.: Издательство Европейского университета в Санкт-Петербурге, 2001. — 344 с.*

## ISBN

Книга представляет собой краткое и сравнительно элементарное учебное пособие, призванное предоставить в распоряжение студентов экономических специальностей достаточно простое и доступное руководство, содержащее изложение основ современной теории игр.

Для широкого круга читателей (студентов, аспирантов, научных работников), занимающихся вопросами приложений математики к экономике.

Редакционная коллегия:

А. К. БАЙБУРИН, Н. Б. ВАХТИН, Б. А. КАЦ,  
В. В. ЛАПИН, С. Л. ПЕЧЕРСКИЙ, О. В. ХАРХОРДИН

Рецензенты:

Зав. лабораторией теории игр и принятия решений  
Санкт-Петербургского экономико-математического института

Д. ф.-м. н. Е.Б. ЯНОВСКАЯ

Зав. кафедрой экономической кибернетики  
Санкт-Петербургского государственного университета  
К.э.н. Д.Н. КОЛЕСОВ

*Издание осуществлено при финансовой поддержке  
Института "Открытое общество"  
(Фонд Сороса), Россия  
Грант НВС904*

Без объявления

ISBN

© Европейский университет в  
Санкт-Петербурге, 2001

© С.Л. Печерский

© А.А. Беляева

# Оглавление

|                                                                                |           |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Предисловие</b>                                                             | <b>7</b>  |
| <b>Введение</b>                                                                | <b>11</b> |
| <b>I Бескоалиционные игры</b>                                                  | <b>27</b> |
| <b>1. Статические игры с полной информацией</b>                                | <b>29</b> |
| 1.1. Способы задания бескоалиционных игр . . . . .                             | 29        |
| 1.2. Игры в нормальной форме . . . . .                                         | 33        |
| 1.3. Доминируемые стратегии . . . . .                                          | 37        |
| 1.4. Последовательное удаление слабо доминируемых стратегий . . . . .          | 41        |
| 1.5. Рационализуемые стратегии . . . . .                                       | 47        |
| 1.6. Равновесие по Нэшу . . . . .                                              | 51        |
| 1.7. Равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях .                               | 56        |
| 1.8. Антагонистические игры . . . . .                                          | 62        |
| 1.9. Примеры . . . . .                                                         | 69        |
| 1.9.1. Модель дуополии по Курно . . . . .                                      | 69        |
| 1.9.2. Равновесие по Нэшу в дуополии по Курно как результат обучения . . . . . | 70        |
| 1.9.3. Дуополия по Бертрону . . . . .                                          | 72        |
| 1.9.4. «Проблема общего» . . . . .                                             | 74        |
| 1.10. Равновесие «дрожащей руки» . . . . .                                     | 75        |
| 1.11. Дополнение. Решение биматричных игр $2 \times 2$ . .                     | 78        |

|                                                                            |            |
|----------------------------------------------------------------------------|------------|
| 1.12. Задачи . . . . .                                                     | 89         |
| <b>2. Динамические игры с полной информацией</b>                           | <b>93</b>  |
| 2.1. Позиционная форма игры . . . . .                                      | 93         |
| 2.2. Обратная индукция и конечные игры с совершенной информацией . . . . . | 106        |
| 2.3. Совершенное под-игровое равновесие по Нэшу .                          | 109        |
| 2.4. Примеры . . . . .                                                     | 115        |
| 2.5. Повторяющиеся игры . . . . .                                          | 120        |
| 2.6. Задачи . . . . .                                                      | 132        |
| <b>3. Статические игры с неполной информацией</b>                          | <b>139</b> |
| 3.1. Байесовы игры . . . . .                                               | 139        |
| 3.2. Альтернативный взгляд на смешанные стратегии                          | 147        |
| 3.3. Замечание о коррелированном равновесии . . . .                        | 150        |
| 3.4. Примеры . . . . .                                                     | 153        |
| 3.5. Задачи . . . . .                                                      | 158        |
| <b>4. Динамические игры с неполной информацией</b>                         | <b>161</b> |
| 4.1. Совершенное Байесово равновесие . . . . .                             | 161        |
| 4.2. Последовательное равновесие . . . . .                                 | 178        |
| 4.3. Сигнальные игры . . . . .                                             | 181        |
| 4.4. Задачи . . . . .                                                      | 195        |
| <b>5. Элементы эволюционной теории игр</b>                                 | <b>197</b> |
| 5.1. Обучение и эволюция . . . . .                                         | 197        |
| 5.2. Эволюционно устойчивые стратегии . . . . .                            | 206        |
| <b>II Кооперативные игры</b>                                               | <b>215</b> |
| <b>6. Элементы теории кооперативных игр</b>                                | <b>217</b> |
| 6.1. Классические кооперативные игры . . . . .                             | 218        |
| 6.2. Игры без побочных платежей . . . . .                                  | 238        |
| 6.3. Нечеткие коалиции . . . . .                                           | 245        |
| 6.4. Приложения кооперативных игр . . . . .                                | 256        |

|                                                                                            |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 6.5. Дополнение. Существование и единственность<br>вектора Шепли . . . . .                 | 269        |
| 6.6. Дополнение. Выпуклые игры . . . . .                                                   | 274        |
| 6.7. Задачи . . . . .                                                                      | 280        |
| <b>7. Модели распределения</b>                                                             | <b>281</b> |
| 7.1. Рационирование . . . . .                                                              | 282        |
| 7.2. Модель с переменной отдачей . . . . .                                                 | 301        |
| 7.3. Задачи распределения с неоднородными выпус-<br>ком и факторами производства . . . . . | 308        |
| <b>Литература</b>                                                                          | <b>318</b> |



# Предисловие

В настоящее время огромный интерес привлекает теория игр, которая, с одной стороны, наряду с математическими моделями общего равновесия и теорией социального выбора, сыграла ключевую роль в создании современной экономической теории, а с другой, является одним из важнейших инструментов анализа огромного многообразия задач, возникающих не только в экономике, но и политике, социальных науках, военном деле, биологии и др.

Суть теории игр (с экономической точки зрения) в том, чтобы помочь экономистам понимать и предсказывать то, что может происходить в экономических ситуациях, и сейчас вряд ли можно найти область экономики или дисциплины, связанной с экономикой, где основные концепции теории игр не были бы просто необходимыми для понимания современной экономической литературы.

В настоящий момент, если говорить об экономических приложениях, речь идет уже не только о применении теоретико-игровых методов к ставшим достаточно традиционными проблемам теории организации промышленности, но и, по сути дела, ко всему многообразию экономической проблематики. Теорию игр следует понимать как инструмент экономического анализа, который:

- 1) дает ясный и точный язык исследования различных экономических ситуаций;

- 2) дает возможность подвергать интуитивные представления проверке на логическую согласованность;
- 3) помогает проследить путь от «наблюдений» до основополагающих предположений и обнаружить, какие из предположений действительно лежат в основе частных выводов.

При этом, как уже отмечалось выше, в настоящий момент область применения теории игр гораздо шире, чем только экономика.

Предлагаемый вниманию читателя вводный курс теории игр написан на основе лекций по теории игр, которые читались авторами на протяжении ряда лет на факультете экономики Европейского университета в Санкт-Петербурге, студентам кафедры экономической кибернетики Санкт-Петербургского государственного университета и студентам Новгородского государственного университета имени Ярослава Мудрого.

В данном пособии мы не ставили перед собой задачу детального и формального изложения различных аспектов теории игр. Наша главная цель состояла в том, чтобы познакомить студентов экономических специальностей с основами теории игр, представить им «первый набросок панорамной картины», представляющей основные идеи и методы современной теории игр, на простых (порой даже примитивных) моделях продемонстрировать возможности теоретико-игрового моделирования различных экономических ситуаций и дать тем самым в руки ключ к двери, за которой простирается широчайшее многообразие теоретико-игровых моделей. Мы сознательно стремились минимизировать формализм, достаточно часто избегая формулировок соответствующих теорем или их доказательств. В то же время в дополнительных разделах к некоторым главам мы приводим достаточно подробно ряд важных, на наш взгляд, результатов, которые, безусловно, будут полезны тем, кто захочет более детально «прочувствовать» предмет.

К настоящему моменту написано огромное количество учебников по теории игр самого разного уровня, ориентированных на различных читателей. Многие из них приведены в списке литературы. Мы упомянем здесь пять, которые представляются нам наиболее удачными для тех, кто захочет познакомиться с гигантским айсбергом теории игр, лишь крохотную часть которого мы попытались представить в настоящем пособии. Это учебник выдающегося ученого и методолога, основателя советской теоретико-игровой школы — Николая Николаевича Воробьева, многие годы читавшего курс теории игр на экономическом факультете Ленинградского государственного университета (Воробьев, 1985). Далее это учебники Роберта Гиббонса (Gibbons, 1992), Мартина Осборна и Ариэля Рубинштейна (Osborn, Rubinstein, 1994), Дрю Фуденберга и Жана Тироля (Fudenberg, Tirole, 1991) и, наконец, учебник Андре Мас-Колелла, Майкла Уинстона и Джерри Грина (Mas-Colell, Whinston, Green, 1995)<sup>1</sup>. Целый ряд задач и примеров в тексте заимствован нами именно из этих учебников.

Мы хотели бы выразить глубокую признательность нашим студентам, которые помогали нам своими вопросами, комментариями и замечаниями.

Мы выражаем также глубокую благодарность Институту «Открытое Общество», в рамках мегапроекта которого «Развитие образования» стало возможным появление этого пособия.

*Авторы*

---

<sup>1</sup>Далее мы будем ссылаться на эти книги без указания года издания.



# Введение

В последние три десятилетия наблюдается стремительное повышение интереса к теории игр и значительное возрастание ее роли. Во многом это объясняется тем, что без нее в настоящее время уже немыслима современная экономическая теория, причем область применения теории игр постоянно расширяется. Теория игр прошла путь от весьма формализованной теории, представлявшей интерес в первую очередь для математиков и ставшей источником целого ряда работ чрезвычайно глубокого математического содержания, до одного из важнейших инструментов анализа огромного многообразия задач, возникающих в экономике, политике, социальных науках и т. д. (разумеется, не утратив при этом своего математического содержания).

1. Первыми исследованиями игр в экономической литературе, по-видимому, следует считать статьи Курно (Cournot, 1838), Бертрана (Bertrand, 1883) и Эджворта (Edgeworth, 1897), в которых рассматривались проблемы производства и ценообразования в олигополии. Правда, они рассматривались тогда как весьма специфические модели и в некотором смысле существенно опередили свое время.

Анализ различных салонных игр проводился еще в Древнем Китае, но, видимо, первые работы, в которых нахождение оптимальных стратегий в играх формулировалось как математическая задача, появились только в XVII веке (Bachet de Mezirac, Lyon, 1612). Первым серьезным математическим

результатом в этом направлении явилась работа Э. Цермело 1912 г. «О применении теории множеств к шахматной игре» (см.: Матричные игры. Под. ред. Н. Н. Воробьева, М., 1961. С. 137–153). В ней он доказал, что в каждой позиции шахматной партии один из игроков может форсированно выиграть или обеспечить себе ничью, выбирая «правильные» ответы на любой ход противника. Хотя именно эта работа считается первой работой по теории игр, общепризнанным «годом рождения» теории игр стал 1944 г.

В 1944 г. вышла в свет основополагающая монография Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» (von Neumann, Morgenstern, 1944), которая, по существу, заложила фундамент общей теории игр и обосновала возможность анализа огромного массива экономических вопросов с помощью теоретико-игровых моделей. А в 1950 г. Джон Нэш (будущий Нобелевский лауреат по экономике 1994 г.) ввел понятие ситуации равновесия, названной впоследствии его именем, как метода решений бескоалиционных игр (т.е. игр, в которых не допускается возможность создания коалиций). Ситуация, образующаяся в результате выбора всеми игроками некоторых своих стратегий, называется равновесной, если ни одному из игроков невыгодно изменять свою стратегию при условии, что остальные игроки придерживаются равновесных стратегий. Именно равновесие по Нэшу и его модификации признаются наиболее подходящими концепциями решения для таких игр.

За прошедшие с момента появления книги Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна немногим более чем полвека теория игр прошла различные этапы своего развития и пережила несколько волн интереса к ней. Примерно 40–45 лет назад казалось, что теория игр дает чрезвычайно большие обещания экономике, однако эти обещания, увы, оказались тогда во многом лишь обещаниями, хотя в то же время был получен целый ряд очень глубоких математических результатов, представляющих значительный интерес даже вне экономических

приложений. 30 лет назад «теорию игр» можно было найти разве лишь в предметном указателе некоторых учебников по теории организации промышленности<sup>2</sup> при рассмотрении олигополии по Курно, по Бертрону или по Штакельбергу. Однако за последние 20–25 лет произошел гигантский шаг вперед, и теперь вряд ли можно найти область экономики или дисциплины, связанной с экономикой, такой, скажем, как финансы, маркетинг и т. д., в которых основные концепции теории игр не были бы просто необходимыми для понимания современной литературы.

Среди многочисленных определений того, что есть теория игр и каковы ее задачи, которые можно найти в различных статьях, учебниках и монографиях (см., например, Воробьев, 1984, 1985; Aumann, 1989; Dixit, Nalebuff, 1991; Fudenberg, Tirole, 1992; Myerson, 1991; Rasmussen, 1989 и многие другие), упомянем лишь четыре. Первые два — это определения теории игр, которые с некоторыми вариациями, по-видимому, наиболее часто встречаются в литературе и достаточно точно характеризуют общую проблематику, охватываемую теорией игр: «Теория игр — это теория рационального поведения людей с несовпадающими интересами» (Aumann, 1989), и «Теория игр — наука о стратегическом мышлении» (Dixit, Nalebuff, 1991). Третье подчеркивает математическую природу теории игр: «Теория игр — это теория математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликтов» (Воробьев, 1984). Наконец, четвертое определение выделяет роль теории игр именно в экономическом моделировании: «Суть теории игр в том, чтобы помочь экономистам понимать и предсказывать то, что будет происходить в экономическом контексте» (Kreps, 1990). В настоящий момент,

---

<sup>2</sup>В англоязычной литературе общепринятыми являются названия Industrial Organization или Industrial Economics. Соответствующие русские названия курсов — это уже упомянутая теория организации промышленности, структура отраслевых рынков, теория организации отраслевых рынков и другие. Здесь и далее мы будем в сносках указывать английские соответствия основным используемым понятиям.

если говорить об экономическом контексте, речь идет уже не только о применении теоретико-игровых методов к ставшим достаточно традиционными проблемам организации промышленности, но и, по сути дела, ко всему многообразию экономической проблематики. Так, например, на микроуровне — это модели процесса торговли (модели торгога, модели аукционов). На промежуточном уровне агрегации изучаются теоретико-игровые модели поведения фирм на рынках факторов производства (а не только на рынке готовой продукции, как в олигополии). Теоретико-игровые модели возникают в связи с различными проблемами внутри фирмы. Наконец, на высоком уровне агрегации, с международной экономикой связаны модели конкуренции стран по поводу тарифов и торговой политики, а макроэкономика включает модели, в которых, в частности, стратегическое взаимодействие рассматривается в контексте монетарной политики. «Аппарат теории равновесия и теории игр послужил основой для создания современных теорий международной торговли, налогообложения, общественных благ, монетарной экономики, теории производственных организаций» (Полтерович, 1997, с. 11).

Разумеется, следует иметь в виду, что в настоящий момент область применения теории игр гораздо шире, нежели только экономический контекст (который для нас представляет, естественно, особый интерес). Это политический и социальный контексты, биология и военное дело, и многое другое (см., например, Дюбин, Суздаль, 1981; Shubik, 1984; Moulin, 1983, 1986; Ordeshook, 1986; Rawls, 1971; Maynard, Smith 1974 и др.). Скажем, теоретико-игровой подход к изучению формирования коалиций — это уже своего рода традиция в социальных и политических науках (см., например, Riker, 1962; Riker, Ordeshook, 1973; De Swan, 1973; Ordeshook, 1978, 1992; Van Deemen, 1997). Здесь же следует упомянуть, например, книгу «Game Theory and the Law» (D. Baird, R. Gertner, C. Picker, 1994), в которой аппарат теории игр впервые применяется к анализу того, как законы влияют на поведение людей, партий и т. д.

2. Теория игр делится на две составные части: одна — это теория бескоалиционных (некооперативных) игр, а вторая — теория кооперативных игр. Это базовое деление, хотя подчас оно достаточно расплывчато, основано на том, что в бескоалиционной теории основной единицей анализа является (рациональный) индивидуальный участник, который старается сделать «максимально хорошо» себе в соответствии с четко определенными правилами и возможностями. Если происходит так, что индивиды предпринимают действия, которые можно было бы расценить как «кооперацию» в обычном смысле этого слова, то это делается потому, что такое кооперативное поведение оказывается в интересах каждого из индивидов: каждый опасается «расплаты» в случае нарушения кооперации (как это происходит, например, в повторяющихся играх).

В противоположность этому, в теории кооперативных игр основная единица анализа — это, как правило, группа участников, или коалиция; если игра определена, то частью этого определения является описание того, *что* каждая коалиция игроков может получить (чего она может достичь), без указания на то, *как* исходы или результаты будут влиять на конкретную коалицию.

Однако это деление ни в коем случае не следует рассматривать как исключаящее: кооперативный и бескоалиционный подходы — это, если угодно, два взгляда на одну и ту же проблему. Как образно заметил И. Розенмюллер, игра — это «идеал», двумя «теньями» которого являются кооперативный и бескоалиционный подходы.

Бескоалиционная теория стратегически ориентирована. Она изучает то, что, как мы ожидаем, будут *делать* игроки в игре. Кооперативная теория, с другой стороны, изучает *исходы*, которые мы ожидаем (см. Aumann, 1997). При кооперативном подходе мы смотрим непосредственно на пространство исходов, а не на то, каким образом они были достигнуты. Бескоалиционная теория — это своего рода микротеория; она включает детальное описание того,

что происходит. В кооперативной теории нас интересует то, чего игроки могут *достичь*, то есть все потенциально *возможные* (допустимые) исходы<sup>3</sup>. Здесь принимается во внимание *все*, что игроки могут получить, даже если у них нет соответствующих побудительных мотивов. Игроки могут вступать в коалицию и договариваться о совместных действиях, а значит, и относительно исходов; предполагается, что игроки должны соблюдать свои обязательства. Мы можем предполагать, что существует некий механизм типа суда, который форсирует выполнение контрактов, так что должны быть рассмотрены *все возможные исходы*.

Идея противопоставления кооперативного и бескоалиционного относится к началу 50-х годов, однако к концу 60-х годов это противопоставление начало сглаживаться. И если бескоалиционный подход можно сравнивать с микротеорией, то кооперативный (коалиционный) подход изучает игры с «макро» точки зрения, фокусирующей на возможных исходах, которые можно получить при обязывающих соглашениях.

Более того, в последнее время появляется все большее число работ, «наводящих мосты» между бескоалиционной и кооперативной теорией (см., например, Gul, 1989; Greenberg, 1997; Hart, Mas-Colell, 1995; Mas-Colell, 1997; Reny, 1997; Vohra, 1997).

3. Остановимся теперь чуть подробнее на проблемах приложения бескоалиционных игр, которые к настоящему времени занимают, пожалуй, большее место в экономическом моделировании<sup>4</sup>. (Мы не приводим здесь формальные определения, которые будут даны ниже, а на интуитивном уровне прокомментируем лишь некоторые моменты.)

Бескоалиционная теория игр — это способ моделирования и анализа ситуаций, в которых оптимальное решение каждого игрока зависит от его представлений или ожиданий от дей-

---

<sup>3</sup>Feasible outcomes.

<sup>4</sup>Приложения кооперативных игр мы достаточно подробно рассмотрим в гл. 6 и 7.

ствий (игры) его оппонентов (партнеров). Важнейшей чертой этой теории является то, что она «настаивает» на том, что игроки не должны иметь произвольных представлений относительно игры своих оппонентов. Напротив, каждый игрок должен пытаться предсказать игру своих оппонентов, используя свое знание правил игры и предположение, что его оппоненты рациональны и поэтому пытаются сделать свои предсказания и максимизировать свои выигрыши.

Напомним, что цель теории игр — помочь нам понимать и предсказывать экономические феномены. Если применим критерий доминирования, то своего рода негласным соглашением является то, что агенты не будут выбирать стратегии, которые являются доминируемыми (т.е. те стратегии, которые хуже). И до тех пор, пока мы исходим из справедливости этой гипотезы, критерий доминирования дает четкий путь для предсказаний.

С равновесием по Нэшу, к сожалению, все обстоит несколько хуже. В некоторых ситуациях *достаточно очевиден* некоторый вполне определенный способ действия.

|   |   |       |      |   |   |     |      |
|---|---|-------|------|---|---|-----|------|
|   |   | 2     |      |   |   | 2   |      |
|   |   | l     | r    |   |   | l   | r    |
| 1 | u | 0,0   | 2,2  | 1 | u | 0,1 | 5,4  |
|   | d | 10,11 | -1,1 |   | d | 3,6 | -1,0 |
| А |   |       |      | В |   |     |      |

Рассмотрим две приведенные таблицы, игровой смысл которых состоит в следующем. У первого игрока (игрок 1) есть возможность выбрать либо стратегию (ход) *u* (первая строка), либо стратегию *d* (вторая строка). Второй игрок (игрок 2) может выбрать либо стратегию *l* (первый столбец), либо

стратегию  $r$  (второй столбец). Они делают свои ходы одновременно и независимо. После этого они получают свои выигрыши, которые указаны в соответствующих клетках: если, например, игрок 1 выбрал  $u$ , а игрок 2 выбрал  $r$ , то в случае  $A$  оба они получают по 2 рубля (доллара, фунта и пр.), а в случае  $B$  — первый получит 5, а второй 4.

В случае  $A$ , по-видимому, совершенно очевидно, что «играть» надо левую нижнюю клетку (т.е. выбирать, соответственно,  $d$  и  $l$ ), тогда как совершенно не понятно, что нужно играть во втором случае. И одна из возможностей состоит в разрешении предварительных переговоров. Но если бы понятие равновесия по Нэшу можно было оправдать, апеллируя только к предварительным переговорам, то ценность этого понятия была бы достаточно низкой, поскольку центральным становился бы вопрос о «силе договоренности». Однако «оправдание» равновесия по Нэшу исходит из ряда других соображений, на которых мы остановимся, в частности, в главе 1. Мы не будем пытаться приводить сложные модели, а лишь упомянем некоторые возможные приложения. Рассмотрим следующую игру:

|   |   |      |      |
|---|---|------|------|
|   |   | 2    |      |
|   |   | l    | r    |
| 1 | u | 5,5  | -1,6 |
|   | d | 6,-1 | 0,0  |

Ситуации подобного рода достаточно часто возникают в экономических рассуждениях. Представим себе, например, две фирмы, продающие один и тот же (точнее, однородный) продукт. Каждая из фирм может рекламировать свой товар, скажем предлагая его на распродаже, что может увеличить ее прибыль и уменьшить прибыль конкурента при данном

фиксированном способе действия конкурента. Если обе фирмы рекламируют, то чистая прибыль каждого из конкурентов может уменьшиться. (Пример такого рода ситуации дает конкуренция между Airbus и Boeing. Хотя реклама в этом случае не была существенным элементом, в то же время ценовые уступки играли важную роль.) Второго рода пример — две страны, являющиеся торговыми партнерами. Каждая из стран может использовать различные виды протекционистских мер, что в ряде случаев может приводить к выгоде своей страны, при данных фиксированных действиях второй страны. Если обе страны занимаются протекционистской политикой, общее благосостояние стран может снижаться.

В этом примере (мы впоследствии будем неоднократно возвращаться к такого типа игре) равновесие по Нэшу определяется стратегией  $d$  первого игрока и  $r$  — второго игрока. Действительно, если первый игрок выбрал стратегию  $d$ , то второму игроку невыгодно отклоняться от стратегии  $r$ , так как он вместо 0 получит выигрыш  $-1$ . Аналогично, если второй игрок придерживается стратегии  $r$ , то первому невыгодно вместо  $d$  играть  $u$ , так как он также вместо 0 проиграет 1.

В то же время «хорошая» ситуация  $(u, l)$ , когда игрок 1 выбирает  $u$ , а второй —  $l$ , не является ситуацией равновесия по Нэшу, так как, например, игроку 1 выгодно (при условии, что второй играет  $l$ ) отклониться от  $u$  и сыграть  $d$ , поскольку вместо 5 он выиграет 6.

На этом простом примере мы видим, что ситуации равновесия по Нэшу могут приводить к тем исходам, которые представляются весьма неудачными. Однако здесь возникает целый ряд интересных возможностей, в частности связанных с введением динамики, позволяющих уходить от таких «неудач». Однако об этом нам предстоит подробнее говорить ниже.

Безусловно, следует специально подчеркнуть, что большая роль теории игр в экономике во многом объясняется тем, что теория игр дает язык для моделирования и технику анали-

за специфического динамического конкурентного взаимодействия. Скажем, в достаточно простом варианте это можно проиллюстрировать на следующем примере (см.: Kreps, 1990). Представим себе монополиста (в классическом смысле), производящего некоторый товар для продажи. Для простоты будем считать, что спрос определяется кривой  $x = 13 - p$ . Структура затрат монополиста также весьма проста:  $c(x) = 6.25 + x$ . Стандартная теория предсказывает, что монополист, максимизирующий прибыль, будет выпускать 6 единиц готовой продукции и получит прибыль 29.75 (при цене 7). В то же время, если в данной ситуации рассмотреть возможность входа новичка (с такими же характеристиками), то ответ будет уже совершенно другим: укоренившийся монополист, предвидящий возможность входа, будет производить 7 единиц готового продукта (при цене 6), теряя несколько в прибыли в данном периоде, но обеспечивая себе большую прибыль в длительном периоде, поскольку новичок, считаящий, что укоренившаяся фирма будет продолжать выпускать тот же объем продукции, воздержится от входа, так как его вход принесет ему нулевую прибыль.

Разумеется, здесь возникает, например, такой вопрос: а почему собственно новичок должен верить в то, что монополист будет продолжать выпускать такой-то объем готовой продукции, если новичок все-таки «осмелится» войти в отрасль? Этот вопрос, безусловно, существен для этой истории. Хотя простейшая модель не дает ответа на этот вопрос, тем не менее более сложные модели входа со сложной динамикой, которые используют многошаговые игры, уже позволяют анализировать ситуации входа с различными гипотезами о поведении агентов. Скажем, если мы будем рассматривать двухпериодную модель, то уже появляется возможность рассматривать более сложное поведение. Например, возможен вариант, когда монополист в первом периоде выбирает технологию. Он может, к примеру, за счет высоких фиксированных затрат снизить предельные затраты. Высокие фиксированные затраты

и низкие предельные затраты делают поведение монополиста более агрессивным во втором периоде. Далее монополист может в первом периоде предпринимать действия, порождающие «потребительскую лояльность» (скажем, снижать цены), и т.д. и т.п. Известны многочисленные вариации на тему входа. Основной характеристикой соответствующих моделей является то, что в первом периоде монополист совершает действие, которое изменяет природу «дальнейшей игры», если новичок появляется, и которое может либо предотвратить вход совсем, либо позволит монополисту «подготовиться» к входу так, чтобы иметь преимущество в образующейся впоследствии дуополии (см., например, Dixit, 1980).

Другая вариация на эту тему — это рассмотрение ситуации, когда новичок не имеет точного знания характеристик монополиста. Например, новичок не знает структуры затрат монополиста. В этом случае он может воспринимать низкую цену в первом периоде как сигнал, говорящий о низких предельных затратах укоренившейся фирмы, а стало быть, воздержаться от входа. Монополист, понимая это, может, даже в случае высоких предельных затрат, назначить достаточно низкую цену, сигнализируя тем самым о якобы низких затратах.

Следующий момент, который необходимо отметить — это момент, связанный с тем, что теория игр дала возможность моделировать ситуации, когда речь идет о том, верить или не верить тем или иным обещаниям или угрозам. Здесь речь идет о моделировании репутации (скажем, работодатель и работник).

Следующий классический пример, связанный с повторяющимся взаимодействием участников — неявный сговор в олигополии. Он базируется на так называемой Folk Theorem («народной теореме», «фольклорной теореме» — см. гл.2), которая утверждает, что любые выигрыши двух фирм, которые дают каждой из фирм больше максиминного выигрыша и в сумме меньше, чем монопольная прибыль (за период), может

поддерживаться в равновесии, если будущее ценится фирмами достаточно высоко. Как и во многих случаях, здесь возникает неприятный момент множественности равновесия, который, увы, оказывается весьма существенным и вынуждает пытаться вводить различные модификации равновесия по Нэшу.

Равновесия по Нэшу — это «согласованные» предсказания того, как игра будет разыгрываться, в том смысле, что если все игроки предсказывают, что возникнет определенное равновесие, то ни у одного из игроков не будет стимулов для отклонения. Таким образом, равновесие по Нэшу, и только оно может обладать свойством таким, что игроки могут предвидеть его, их оппоненты предвидеть его и т. д. Напротив, предвидение того, что возникнет неравновесная ситуация, влечет за собой то, что по крайней мере один игрок сделает «ошибку», либо в своем предсказании, либо в оптимизации своего выигрыша. Естественно, вряд ли можно считать, что такие ошибки никогда не возникают.

4. В то самое время, когда теория бескоалиционных игр становится стандартным инструментом в экономике, она подвергается значительной критике со стороны как теоретиков, так и экспериментаторов. Бескоалиционная теория игр, подобно неоклассической экономике, базируется на двух «героических» предположениях: *МАКСИМИЗАЦИИ* (каждый экономический агент рационален и ясно представляет себе мир), и *СОГЛАСОВАННОСТИ* (представления агента, и в частности его ожидания относительно поведения остальных агентов правильны). Эти два предположения, по сути дела и оправдывают то, что общие образцы индивидуального оптимизирующего поведения формируют равновесие по Нэшу.

Основная проблема, с которой в настоящее время столкнулись теоретики — это проблема «неотразимого» обоснования этих двух предположений, ибо традиционные обоснования отнюдь не являются неотразимыми. В то же время без такого обоснования использование теории игр в приложениях становится проблематичным. Использование теории игр тре-

бует понимания того, когда эти предположения осмысленны, а в каких случаях — нет. Основной упрек, часто адресуемый экономической методологии, касается центральной роли гипотезы максимизации. Общий неформальный аргумент в пользу максимизации состоит в том, что любой не максимизирующий агент, и в частности любая фирма, не максимизирующая прибыль, будет выдвлена рыночными силами. Это эволюционный аргумент, и как таковой он хорошо известен. Однако работает ли такое оправдание? Является ли равновесие по Нэшу или какое-либо связанное с ним понятие хорошим предсказанием?

Аналогия между бескоалиционной теорией игр и неоклассической экономикой очевидна, но она не абсолютна. Конечно, вопрос о том, максимизируют ли агенты, по существу, один и тот же. Более того, предположение согласованности появляется также в неоклассической экономике как предположение о том, что цены очищают рынок. Однако фундаментальное различие между неоклассической экономикой и бескоалиционной теорией игр в том, что многочисленные равновесия в конкурентной экономике почти всегда разделяют многие из свойств (скажем, эффективность или ее отсутствие), тогда как многочисленные равновесия в игре могут иметь существенно различные свойства. Неоклассическая экономика не ставит вопроса о выборе равновесия, теория же игр обязана это делать.

В настоящее время очень стремительно развивается эволюционная теория игр.

Большинство работ по эволюционной теории игр мотивированы двумя основными вопросами: 1. Действительно ли агенты играют равновесие по Нэшу? 2. Если агенты играют равновесие по Нэшу, то *какое*?

Эволюционная теория игр формализует и обобщает эволюционный аргумент, предполагая, что более успешное поведение имеет тенденцию превалировать. В канонической модели популяция игроков взаимодействует во времени, причем их поведение приспосабливается во времени в ответ на их выигрыши (полезности, прибыли и т. д.), к которым исторически

приводил их выбор. Эти игроки могут быть работниками, потребителями, фирмами и т. п. В центре внимания находится динамическое поведение системы. Ключевыми предположениями являются предположения о том, что имеется популяция игроков, эти игроки взаимодействуют, и что поведение игроков наивно (в двух смыслах: игроки не верят, не понимают, что их собственное поведение потенциально влияет на будущее поведение их оппонентов, и игроки не принимают во внимание возможность того, что их оппоненты подобным же образом вовлечены в приспособление своего собственного поведения). Здесь важно заметить, что успешное поведение становится превалирующим не только потому, что рыночные силы производят отбор, исключая неуспешное поведение, но и потому, что агенты имитируют успешное поведение.

Поскольку эволюционная теория игр изучает популяции, «играющие в игры», она также полезна при изучении социальных норм и конвенций. Эволюция конвенций и социальных норм является примером игроков, *обучающихся играть равновесие*. Примеры включают популяцию потребителей, которые должны решить, какой тип товара покупать; популяцию работников, которые должны решить, какие усилия прилагать, и т. д.

Эволюционная теория игр дает положительный ответ на первый вопрос: во многих постановках игроки действительно играют равновесие по Нэшу. Таким образом, это дает оправдание равновесного анализа тогда, когда осмысленны эволюционные аргументы. Равновесие лучше всего рассматривать как устойчивое состояние сообщества, члены которого близоруко группируются «по направлению» к максимизирующему поведению. И это существенно контрастирует с более ранним взглядом (у которого нет достаточного фундамента), в соответствии с которым теория игр и равновесный анализ представляют исследование взаимодействия ультрарациональных агентов с «большим запасом» знаний.

Вопрос о том, какое равновесие играет, широко обсуждается, особенно в литературе, касающейся «уточнений» (или «уточнений») равновесия. Однако проблема обоснования также относится и к ним. Можно представить себе, например, что допускается пред-игровое общение, которое приводит к тому, что определяется, какое равновесие играет (скажем, все работники прикладывают максимум усилий, или, напротив, минимум, если, к примеру, общий выпуск определяется минимальным (среди всех работников) уровнем усилий). Такое оправдание равновесия, конечно, возможно и применимо к ряду приложений. Но это не покрывает все возможности, тем более что неизбежны ситуации, когда договор может нарушаться, или, что просто может не быть возможности предварительного общения.

Второе оправдание *самоосуществляющегося предсказания* может проходить примерно следующим образом: если теоретически единственным образом предсказанное поведение игроков известно игрокам в игре, то она должна предсказывать равновесие по Нэшу. Трудность здесь в том, что такое оправдание требует теории, которая *однозначно* предсказывает поведение игроков, а в этом-то проблема как раз и состоит.

Оправдание с помощью «фокальной точки» (Т.Шеллинг) можно формулировать примерно так: «если есть *очевидный* путь играть в игре (либо в силу специфики постановки, либо в силу специальной структуры), то игроки будут знать, что будут делать другие игроки».

Наконец, игроки могут *научиться* играть некоторое равновесие. Для того, чтобы научиться играть некоторое равновесие, игроки должны иметь возможность повторять розыгрыш этой или, по крайней мере близкой, игры, чтобы иметь возможность получать нужный опыт. Если только игроки узнали, как играют их оппоненты, и если игроки максимизируют, то они должны оказаться в равновесии по Нэшу. В этой истории с обучением есть два момента.

Первый — игроки максимизируют. Второй — это то, что при условии максимизирующего поведения игроков игроки могут узнать поведение своих оппонентов. Это включает в себя дополнительные нюансы обучения. Даже если игрок знает, как его оппоненты играли, он может не знать, каково было наилучшее действие. Наконец, само обучение меняет обстановку, которую агенты пытаются узнать, причем процесс обучения весьма тонок.

Мы остановились здесь на некоторых моментах, которые представляются нам важными и на которых мы считали необходимым остановиться в преддверии формального изложения теории.

## Часть I

# Бескоалиционные игры



## Глава 1.

# Статические игры с полной информацией

### 1.1. Способы задания бескоалиционных игр

Основная часть курса будет посвящена теории бескоалиционных игр. Это ни в коей мере не означает, что отсутствует интерес экономистов к «кооперативному поведению». Напротив, в настоящее время заметен существенный интерес к попыткам объяснить, каким образом кооперация может возникнуть как результат поведения индивидов, преследующих свои цели. Наконец, есть целый ряд важных задач, где роль теории кооперативных игр весьма существенна. Им мы посвятим заключительную часть курса.

Теория бескоалиционных игр — это способ моделирования и анализа ситуаций, в которых оптимальные решения каждого участника (игрока) зависят от его представлений (или ожиданий) об игре оппонентов. Как уже говорилось во введении, важнейшим моментом теории является акцент на то, что игроки не должны придерживаться *произвольных* представлений об игре своих оппонентов. Напротив, каждый игрок должен

пытаться предсказать игру своих оппонентов, используя свои знания правил игры и исходя из предположений, что его оппоненты сами рациональны, а потому пытаются сами также предсказать игру своих оппонентов и максимизировать свои собственные выигрыши.

Есть два способа задания игры. Первый — это *позиционная форма*<sup>1</sup> игры. Позиционная форма задает: (1) порядок ходов; (2) «альтернативы» (выбор), доступные игроку тогда, когда наступает очередь его хода; (3) информация, которую игрок имеет на каждом из своих ходов; (4) выигрыши (всех) игроков как функцию выбранных ходов; (5) вероятностные распределения на множестве ходов Природы.

Позиционная форма представляется *деревом игры*, которое можно рассматривать как обобщение дерева принятия решений, используемое в теории принятия решений, на случай нескольких игроков. Формальное определение мы приведем в гл. 2. «Древесная структура» описывает, какая вершина следует за какой, какой игрок ходит в соответствующей вершине. Информация, которую имеют игроки, описывается с помощью информационных множеств (см. рис. 1). Если две вершины лежат в одном информационном множестве, то это означает, что игрок (в данном случае 3) не может сказать, какое из двух действий (Л или П) в действительности произошло (в этом смысле игрок не различает вершины дерева, лежащие в одном информационном множестве).

На рис. 2 и 3 изображены недопустимые информационные множества: информационные множества не могут пересекаться (не различая вершины одного информационного множества и вершины другого информационного множества, которое пересекается с первым, игрок тем самым не различает вершины, лежащие в объединении этих информационных множеств); в вершинах одного информационного множества множества доступных игроку альтернатив должны совпадать (иначе игрок сможет различать вершины информационного множества, а

---

<sup>1</sup>Или расширенная форма — extensive form

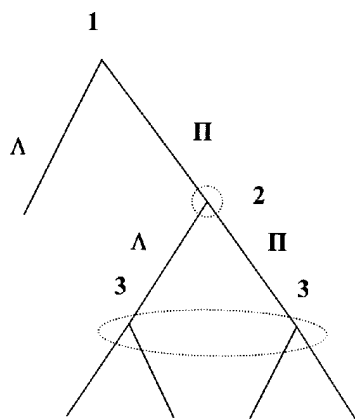


Рис. 1. Информационные множества отмечены пунктиром.

1, 2, 3 — номера игроков, имеющих право хода  
(здесь не указаны выигрыши в концевых вершинах дерева).

стало быть, различать действия, предшествовавшие его ходу).

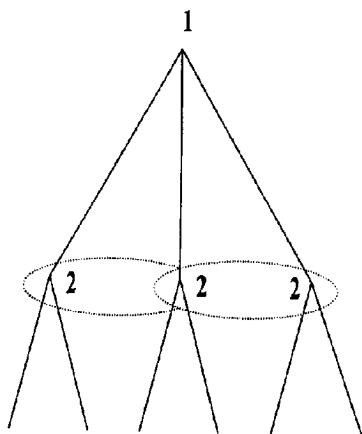


Рис. 2

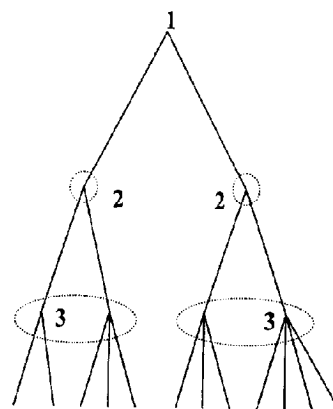


Рис. 3.

Приведем элементарный пример. Рассмотрим следующую игру: первый игрок выбирает одну из трех цифр — 1, 2 или 3. Затем второй игрок, не зная выбора первого игрока, также

выбирает одну из трех цифр — 1, 2, 3. Если сумма выбранных цифр четна, то первый игрок выигрывает у второго один рубль (доллар, фунт и пр.). Если сумма — нечетная, то наоборот — выигрывает второй. Дерево соответствующей игры изображено на рис. 4.

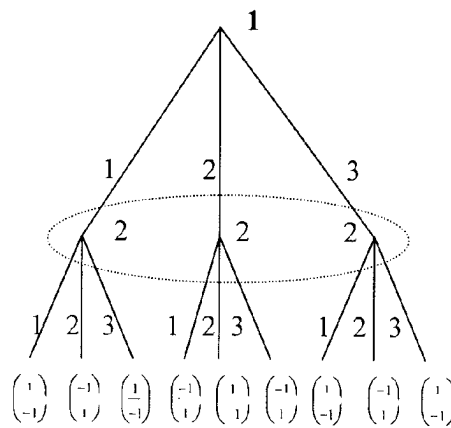


Рис. 4. В конечных вершинах указаны выигрыши игроков.

На рис. 5 изображена модификация этой игры, в которой второму игроку становится известно либо, что первый игрок выбрал цифру 2, либо, напротив, что цифру 2 он не выбрал.

Мы вернемся к позиционной форме в гл. 2 (поскольку в этой главе нас интересуют статические игры с полной информацией, для которых позиционная форма — это некоторое излишество), а теперь перейдем ко второй возможной форме представления игры — *нормальной* или *стратегической форме*, которая «суммирует» позиционную игру в трех элементах: множестве игроков  $I$ , множестве стратегий каждого игрока и функции выигрышей, ставящей в соответствие каждому набору стратегий игроков соответствующие выигрыши игроков.

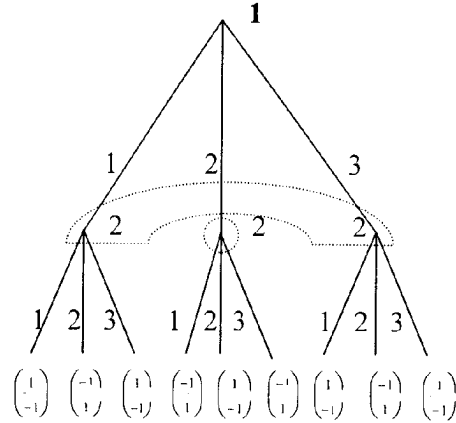


Рис. 5.

## 1.2. Игры в нормальной форме

Итак, *игра в нормальной (или стратегической) форме*<sup>2</sup> — это тройка  $\{I, S = \prod_i \{S_i\}_{i \in I}, u = (u_1, \dots, u_n)\}$ , где  $I = \{1, \dots, n\}$  — множество игроков;  $S_i$  — множество стратегий (ходов)<sup>3</sup>, доступных игроку  $i = 1, \dots, n$ ,  $u_i : S = \prod_{i \in I} S_i \rightarrow \mathbb{R}^1$  — функция выигрышей игрока  $i$ , ставящая в соответствие каждому набору стратегий  $s = (s_1, \dots, s_n)$ , называемому также ситуацией, выигрыш этого игрока<sup>4</sup>.

Стандартный пример здесь — дуополия по Бертранию и по Курно, когда стратегии — это цены или объемы выпуска, соответственно, а выигрыши — это прибыль (см. п. 1.9).

Важным предположением, которое играет ключевую роль

<sup>2</sup>Normal form representation.

<sup>3</sup>В настоящей главе, в которой рассматриваются статические игры, то есть игры, в которых игроки ходят один раз, одновременно и независимо, стратегия игрока и его ход — это одно и то же. Принципиальная разница, как мы увидим ниже, возникает в динамическом случае.

<sup>4</sup>Разумеется, в общем случае, мы не должны исключать случаи  $S \subsetneq \prod S_i$ , соответствующие «играм с запрещенными ситуациями». Однако мы здесь такие игры не рассматриваем.

в теории, является предположение о том, что все игроки *рациональны*, в том смысле, что каждый игрок рассматривает имеющиеся в его распоряжении альтернативы, формирует представления относительно неизвестных параметров, имеет четко определенные предпочтения и выбирает свои действия в результате некоторого процесса оптимизации (максимизации своей целевой функции). Более того, не менее существенным является факт общеизвестности (общего знания)<sup>5</sup> рациональности игроков, т.е. все игроки не только рациональны, но и знают, что другие игроки рациональны, знают, что все игроки знают, что они рациональны и т.д. Формальное определение общеизвестности см. Aumann (1976).

**Замечание 1.2.1.** *В последние годы появилось значительное число работ, посвященных исследованию моделей ограниченной рациональности. Основная мотивация этих работ — неудовлетворенность теорией, оперирующей с «совершенно рациональным человеком», поскольку мы являемся свидетелями весьма частого несоответствия реального поведения людей предположению «совершенной рациональности». Идея моделирования ограниченной рациональности восходит к работам Герберта Саймона (Simon, 1955, 1956; см. также Simon, 1972, 1976). Обсуждение проблем, связанных с моделированием ограниченной рациональности, можно найти, например, в книге Rubinstein (1998). Различные взгляды на проблемы моделирования рациональных и ограниченных рациональных игроков изложены в работах Binmore (1987, 1988), Aumann (1996).*

Обратимся к тому случаю, когда  $I = \{1, 2\}$  и множества стратегий каждого из двух игроков конечны. В этом случае игру можно «изобразить» с помощью матрицы (см. рис. 6), где  $M = |S_1|$  — число возможных стратегий игрока 1,  $K = |S_2|$  — число возможных стратегий игрока 2,  $a_{mk} = u_1(s_1^{(m)}, s_2^{(k)})$ ,  $b_{mk} = u_2(s_1^{(m)}, s_2^{(k)})$ ,  $k = 1, \dots, K$ ,  $m = 1, \dots, M$ .

---

<sup>5</sup>Common knowledge.

$$\begin{array}{c} s_1^1 \\ \vdots \\ s_2^{(M)} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} s_2^1 & & s_2^{(K)} \\ \left( \begin{array}{ccc} (a_{11}, b_{11}) & \dots & (a_{1K}, b_{1K}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (a_{M1}, b_{M1}) & \dots & (a_{MK}, b_{MK}) \end{array} \right) \end{array}$$

Рис. 6.

Эту же игру можно представить в виде двух матриц (поэтому такие игры называются часто биматричными), элементами которых являются элементы  $a_{mk}$  и  $b_{mk}$ , соответственно.

Для конечной *антагонистической* игры, т.е. игры двух лиц, такой, что  $u_1(s_1, s_2) = -u_2(s_1, s_2)$  для всех  $s_i \in S_i$ ,  $i = 1, 2$ , справедливо равенство  $a_{mk} = -b_{mk}$  для всех  $m$  и  $k$ , а поэтому такая игра может быть задана только одной матрицей  $(a_{mk})_{\substack{m=1, \dots, M \\ k=1, \dots, K}}$ , и поэтому конечные антагонистические игры называются матричными (см. подробнее Раздел 1.8).

*Смешанная стратегия*<sup>6</sup>  $\sigma_i$  — это вероятностное распределение на множестве *чистых* стратегий  $S_i$ . (Мотивацию введения смешанных стратегий мы оставляем на будущее.) Рандомизация каждым игроком своих стратегий статистически независима от рандомизаций его оппонентов, а выигрыши, соответствующие профилю (набору) смешанных стратегий, — это ожидаемое значение выигрышей соответствующих чистых стратегий (т.е. речь здесь идет об ожидаемой полезности). Одна из причин, по которой мы сосредоточиваемся на конечном случае, — стремление избежать «осложнений», связанных с теорией меры.

Будем обозначать пространство смешанных стратегий  $i$ -го игрока через  $\Sigma_i$ , а  $\sigma_i(s_i)$  — вероятность того, что выбирается стратегия  $s_i$ . Пространство наборов смешанных стратегий —  $\Sigma = \prod_{i \in I} \Sigma_i$ , элементы которого мы будем обозначать через  $\sigma$ . *Носитель* смешанной стратегии  $\sigma_i$  — это множество тех чистых стратегий, которым «приписана» положительная вероятность.

---

<sup>6</sup>Mixed strategy.

**Определение 1.2.1.** Если  $S_i$  — конечное множество чистых стратегий игрока  $i$ , то смешанная стратегия  $\sigma_i : S_i \rightarrow [0, 1]$  ставит в соответствие каждой чистой стратегии  $s_i \in S_i$  вероятность  $\sigma_i(s_i) \geq 0$  того, что она будет играть, причем  $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$ .

(Обратим внимание на то, что индекс  $i$  означает здесь, что речь идет о стратегии игрока  $i$ . Поэтому, если мы будем говорить о *разных* стратегиях игрока  $i$ , то мы будем обозначать их  $s_i, s'_i, s''_i, \dots$ ) Нетрудно заметить, что множество смешанных стратегий игрока  $i$  — это  $(k_i - 1)$ -мерный симплекс, где  $k_i$  — число чистых стратегий  $i$ -го игрока.

Выигрыш игрока  $i$ , соответствующий профилю (набору) стратегий  $\sigma$ , есть

$$u_i(\sigma) = \sum_{s \in S} \left( \prod_{j=1}^n \sigma_j(s_j) \right) u_i(s) \quad (2.1)$$

(поскольку на наборах чистых стратегий значения этой функции совпадают со значениями исходной функции выигрышей  $u_i$ , мы сохраняем то же обозначение).

Важно отметить, что выигрыш  $i$ -го игрока есть линейная функция от вероятностей  $\sigma_i$ , а также является полиномом от профиля, а потому непрерывен. Наконец, чистые стратегии являются вырожденными смешанными стратегиями, приписывающими вероятность 1 данной чистой стратегии и вероятность 0 — остальным.

**Определение 1.2.2.** Смешанным расширением игры  $\Gamma = \{I, S, u\}$  называется игра  $\bar{\Gamma} = \{I, \Sigma, u\}$ , где  $\Sigma = \prod_{i \in I} S_i$ , а  $u(\sigma)$ , где  $\sigma \in \Sigma$ , определяется равенством (2.1).

Пример. Рассмотрим игру, изображенную на рис. 7.

|     | $L$      | $M$      | $P$      |
|-----|----------|----------|----------|
| $u$ | $(4, 3)$ | $(5, 1)$ | $(6, 2)$ |
| $m$ | $(2, 1)$ | $(8, 4)$ | $(3, 6)$ |
| $d$ | $(3, 0)$ | $(9, 6)$ | $(2, 8)$ |

Рис. 7.

Пусть  $\sigma_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$  (это означает, что смешанная стратегия игрока 1 предписывает ему играть стратегии  $u$ ,  $m$  и  $d$  с вероятностями  $1/3$ ),  $\sigma_2 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  (эта смешанная стратегия игрока 2 предписывает играть стратегии  $M$  и  $R$  с равными вероятностями и не играть стратегию  $L$  вовсе).

В данном случае мы получаем

$$\begin{aligned}
 u_1(\sigma) &= \frac{1}{3} \left( 0 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 6 \right) + \\
 &+ \frac{1}{3} \left( 0 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 3 \right) + \\
 &+ \frac{1}{3} \left( 0 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 2 \right) = \frac{11}{2}, \\
 u_2(\sigma) &= \frac{27}{6}.
 \end{aligned}$$

### 1.3. Доминируемые стратегии

Посмотрим внимательно на приведенную выше игру (рис. 7). Независимо от того, как играет игрок 1,  $R$  дает игроку 2 строго больший выигрыш, нежели  $M$ . В этом смысле стратегия  $M$  *строго доминируема*, поэтому ясно, что рациональный игрок 2 не должен играть  $M$ . Далее, если игрок 1 знает (т.к. он сам рационален и знает, что другой рационален...), что 2 не будет играть  $M$ , то для него  $u$  будет лучше, чем  $m$  или  $d$ . Наконец, если игрок 2 знает, что игрок 1 знает, что игрок 2

не будет играть  $M$ , то игрок 2 знает, что 1 будет играть  $u$ , а тогда 2 должен играть  $L$ . Этот процесс — последовательное удаление строго доминируемых стратегий (мы дадим позднее строгое определение и соответствующий экономический пример). Вопрос, естественно возникающий здесь: «А не зависит ли множество стратегий, выдерживающих такое исключение доминируемых стратегий, от порядка исключения?» К счастью, нет, и дело здесь в том, что если стратегия  $s_i$  строго хуже, чем  $s'_i$  для всех стратегий оппонента из множества  $D$ , то она хуже, чем  $s'_i$  и для любого подмножества множества  $D$ .

Посмотрим теперь на следующую игру (рис. 8):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} U \\ M \\ D \end{array} & \left( \begin{array}{cc} (2, 0) & (-1, 0) \\ (0, 0) & (0, 0) \\ (-1, 0) & (2, 0) \end{array} \right) \end{array}$$

Рис. 8.

Здесь  $M$  не доминируется строго стратегией  $U$ , и  $M$  не доминируется строго стратегией  $D$ . Однако, если игрок 1 играет  $U$  с вероятностью  $1/2$  и  $D$  — с вероятностью  $1/2$ , он обеспечивает себе выигрыш  $1/2$  независимо от того, как играет игрок 2. Следовательно, чистая стратегия может строго доминироваться смешанной стратегией, даже если она не доминируется строго никакой чистой стратегией.

Введем следующие обозначения: пусть  $i \in I$ , тогда через  $s_{-i} \in S_{-i}$  будем обозначать набор стратегий игроков из  $I \setminus \{i\}$ ,  $(s'_i, s_{-i})$  обозначает набор стратегий  $(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$ . Аналогично, для смешанных стратегий  $(\sigma'_i, \sigma_{-i})$  — это  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma'_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$ . (Заметим, что в этих обозначениях  $s = (s_i, s_{-i})$ .)

**Определение 1.3.1.** Чистая стратегия  $s_i$  игрока  $i$  в игре  $\Gamma$  строго доминируема (строго доминируется), если существует другая чистая стратегия  $s'_i$  такая, что

$$u_i(s'_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \quad (3.1)$$

для всех  $s_{-i} \in S_{-i}$ .

В этом случае говорят, что стратегия  $s'_i$  доминирует стратегию  $s_i$ . Стратегия  $s_i$  слабо доминируется, если существует такая  $s'_i$ , что (3.1) выполняется как нестрогое неравенство, но хотя бы для одного набора  $s_{-i}$  — неравенство строгое.

Аналогично определение и для смешанных стратегий:

**Определение 1.3.2.** Смешанная стратегия  $\sigma_i$  строго доминируется в игре  $\bar{\Gamma}$ , если существует другая стратегия  $\sigma'_i$  такая, что для всех  $\sigma_{-i} \in \Sigma_{-i}$

$$u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

Стратегия  $\sigma_i$  называется строго доминирующей стратегией для игрока  $i$  в игре  $\bar{\Gamma}$ , если она строго доминирует любую другую стратегию из  $\Sigma_i$ .

Заметим, что для проверки строгой доминируемости  $\sigma_i$  стратегией  $\sigma'_i$ , нам нужно посмотреть на «поведение» этих двух стратегий против чистых стратегий оппонентов игрока  $i$ .

Формально:

$$(A) \quad u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \quad \forall \sigma_{-i}$$

тогда и только тогда, когда

$$(B) \quad u_i(\sigma'_i, s_{-i}) > u_i(\sigma_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i}.$$

Действительно: рассмотрим разность

$$u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) - u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \left( \prod_{k \neq i} \sigma_k(s_k) \right) [u_i(\sigma'_i, s_{-i}) - u_i(\sigma_i, s_{-i})].$$

Тогда если (В), то (А), т.к. все  $[u_i(\sigma'_i, s_{-i}) - u_i(\sigma_i, s_{-i})] > 0$ .  
(В) следует из (А), т.к.  $s_{-i}$  — вырожденный случай  $\sigma_{-i}$ .

**З а д а ч а.** Докажите, что если чистая стратегия  $s_i$  является строго доминируемой, то таковой же является и любая стратегия, использующая  $s_i$  с положительной вероятностью.

Однако смешанная стратегия может быть строго доминируемой, даже если она использует с положительной вероятностью чистые стратегии, которые даже не слабо доминируемы. Действительно, рассмотрим следующую игру (рис. 9):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} U \\ M \\ D \end{array} & \left( \begin{array}{cc} (1, 3) & (-2, 0) \\ (-2, 0) & (1, 3) \\ (0, 1) & (0, 1) \end{array} \right) \end{array}$$

Рис. 9.

Стратегия первого игрока  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$  дает ожидаемый выигрыш  $-\frac{1}{2}$  вне зависимости от того, что играет игрок 2, а следовательно, строго доминируется стратегией  $D$ .

Естественно, что строго доминируемые стратегии надо удалять. Если игра разрешима в смысле последовательного удаления строго доминируемых стратегий, т.е. каждый игрок остается с единственной стратегией, как в нашем первом примере, то, получившаяся ситуация будет хорошим кандидатом для предсказания того, как будет проходить игра.

Вернемся к игре, изображенной на рис. 7. Нетрудно убедиться в том, что здесь в результате последовательного удаления строго доминируемых стратегий остается пара стратегий  $(u, L)$ . На первом шаге удаляется стратегия  $M$  (она доминируется стратегией  $R$ ). Затем удаляется стратегия  $m$  (доминируемая стратегией  $u$ ). На третьем шаге удаляется стратегия  $d$  (доминируется стратегией  $u$ ). Наконец, на последнем шаге удаляется  $R$ .

Но даже если такие ситуации представляют собой хорошие кандидатуры, все не обязательно произойдет в соответствии с их «предписанием», особенно если выигрыши могут принимать «экстремальные» значения.

Рассмотрим, например, следующую игру (рис. 10):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ D \end{array} & \left( \begin{array}{cc} (20, 10) & (15, 20) \\ (-100, 20) & (40, 30) \end{array} \right) \end{array}$$

Рис. 10.

Очевидно, что здесь стратегия  $L$  доминируется стратегией  $R$ , а потому ситуация  $(D, R)$  является хорошим кандидатом. Но ... Проигрыш игрока 1 в ситуации  $(D, L)$  слишком велик, поэтому вполне можно допустить, что игрок 1 может не рискнуть сыграть стратегию  $d$  (допуская, например, возможность случайной ошибки игрока 2).

Все, конечно, изменится, если игроки могут договориться до принятия решения. В этом случае все уже будет зависеть от «силы» договоренности.

#### 1.4. Последовательное удаление слабо доминируемых стратегий

Рассмотрим следующую известную игру «Море Бисмарка». Предыстория события такова: 1943 г., адмирал Итамуга получил приказ доставить подкрепление по морю Бисмарка на Новую Гвинею. В свою очередь адмирал Кеннеу должен был восприять этому. Итамуга должен был выбрать между Северным (более коротким) и Южным маршрутами, а Кеннеу — решить, куда посылать самолеты, чтобы разбомбить конвой. Причем в течение одного дня самолеты могли бомбить лишь на одном из двух направлений — либо на Северном, либо на Южном маршрутах (но не на двух). Поэтому,

если Кеннеу посылает самолеты в сторону неправильного маршрута, то они возвращаются на базу, но число дней, когда возможна бомбежка, уменьшается. Описываемая ситуация моделируется следующей игрой, в которой выигрыши — это число дней, когда возможна бомбежка конвоя (естественно, со знаком «+» для Кеннеу и «−» для Имамуг'ы). Считаем, что Северный маршрут занимает 2 дня, а Южный — 3 (см. рис. 11).

|        |   |                                                                        |   |
|--------|---|------------------------------------------------------------------------|---|
|        |   | Imamura                                                                |   |
|        |   | С                                                                      | Ю |
| Kenney | С | $\begin{pmatrix} (2, -2) & (2, -2) \\ (1, -1) & (3, -3) \end{pmatrix}$ |   |
|        | Ю |                                                                        |   |

Рис. 11.

Вообще говоря — это матричная игра, т.е. антагонистическая игра с конечным множеством стратегий у каждого игрока. Ни один игрок не имеет доминирующей стратегии. Но здесь можно говорить о слабом доминировании: для Имамуг'ы стратегия Ю слабо доминируема, так как для любой стратегии Кеннеу проигрыш Имамуг'ы (число дней, когда конвой будет подвергаться бомбардировкам) не меньше для Ю, чем для С, но для стратегии Кеннеу Ю — проигрыш при С строго меньше, чем при Ю.

Последовательное (итерированное) удаление слабо доминируемых стратегий проходит следующим образом: исключается одна из слабо доминируемых стратегий одного из игроков, затем из оставшихся стратегий исключается одна из слабо доминируемых стратегий и т.д.

Представим себе, что Кеннеу понимает это и считает, что Имамуга выберет Север. В этой новой ситуации Кеннеу имеет уже доминирующую стратегию — Север. Это и дает нам равновесие при последовательном удалении доминируемых стратегий. (В действительности так и случилось: 2–5 марта 1943 г.

ВВС США и Австралии атаковали японский конвой, который шел по Северному пути и потопили все транспортные корабли и 4 эсминца: из 7000 чел. до Новой Гвинеи добралась 1000.)

Процедура последовательного удаления слабо доминируемых стратегий аналогична удалению строго доминируемых стратегий. Однако здесь есть одно весьма значительное отличие. А именно, множество стратегий, которые выдерживают последовательное удаление слабо доминируемых стратегий (то есть остаются), может зависеть от порядка удаления стратегий.

Действительно, рассмотрим следующую игру (рис. 12):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} U \\ M \\ D \end{array} & \left( \begin{array}{cc} (1, 1) & (0, 0) \\ (1, 1) & (2, 1) \\ (0, 0) & (2, 1) \end{array} \right) \end{array}$$

Рис. 12.

Если вначале удаляется  $U$  (слабо доминируется  $M$ ), а затем  $L$  (слабо доминируется  $R$ ), то мы приходим к исходу  $(2, 1)$  (второй игрок выбирает  $R$ ). Если же вначале удаляется  $D$  (слабо доминируется  $M$ ), а затем  $R$  (слабо доминируется  $L$ ), то мы приходим к исходу  $(1, 1)$ .

Рассмотрим несколько примеров. Мы начнем со знаменитой *Дилеммы Заключенного* — в некотором смысле чрезвычайно простой игры, которая в разных формулировках встречается в большинстве учебников по теории игр, которая приводится едва ли не в самом начале каждого курса и которую многие сразу же вспоминают, когда слышат словосочетание «теория игр».

*Дилемма Заключенного.* Ставший почти хрестоматийным сюжет этой стилизованной истории таков. Двое подозреваемых в совершении тяжкого преступления арестованы и помещены в одиночные камеры, причем они не имеют возможности

передавать друг другу какие-либо сообщения. Их допрашивают поодиночке. Если оба признаются в совершении преступления, то им грозит, с учетом их признания, тюремное заключение сроком по 6 лет каждому. Если оба будут молчать, то они будут наказаны за совершение какого-то незначительного преступления (скажем, незаконное хранение оружия или что-нибудь в этом духе) и получают в этом случае по 1 году тюремного заключения. Если же один из них сознается, а другой — нет, то первый, за содействие следствию, будет вовсе освобожден от наказания, тогда как второй будет приговорен к максимально возможному за данное преступление наказанию — 10-летнему тюремному заключению.

Описанная история может быть представлена следующей игрой (рис. 13):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} M & C \end{array} \\ \begin{array}{c} M \\ C \end{array} & \left( \begin{array}{cc} (-1, -1) & (-10, 0) \\ (0, -10) & (-6, -6) \end{array} \right) \end{array}$$

Рис. 13.

Здесь нетрудно убедиться в том, что стратегия «молчать» является строго доминируемой для каждого игрока (еще раз напомним, что они *рациональны*), поэтому каждый игрок выберет стратегию «сознаться». В результате оба заключенных получают по 6 лет тюремного заключения.

Как мы увидим ниже, ситуация («сознаться», «сознаться»), естественно, является ситуацией равновесия по Нэшу. При этом мы сразу же сталкиваемся с бросающейся в глаза проблемой: получающийся исход очень плохой — он дает максимальный суммарный срок заключения (разумеется, мы подчеркиваем это еще раз, не следует забывать предположение о *рациональности* игроков, поскольку здесь исключаются из рассмотрения проблемы предательства, и т.д.). Это послужило толчком к многочисленным исследованиям этой игры, поскольку, например, естественным желанием было

бы получить в качестве исхода этой игры (или ее модификаций) ситуацию («молчать», «молчать»), дающую каждому заключенному лишь по одному году заключения.

Следующая игра имеет уже ярко выраженный экономико-политический подтекст, хотя разделяет с «Дилеммой Заключенного» упомянутую выше специфику, поэтому мы позволим себе сохранить то же название:

*«Дилемма Заключенного — 2».* Рассмотрим две нефтедобывающие страны, которые мы назовем, скажем, А и В. Эти две страны могут кооперироваться (К), договариваясь об объемах ежедневной добычи нефти, ограничиваясь, к примеру, добычей 2 млн. баррелей нефти в день для каждой страны. С другой стороны, страны могут действовать некооперативно (Н), добывая, скажем, по 4 млн. баррелей в день. Такая ситуация может быть представлена следующей игрой, в которой указаны прибыли стран в зависимости от их объемов добычи нефти (рис. 14).

|   |   |          |          |
|---|---|----------|----------|
|   |   | В        |          |
|   |   | К        | Н        |
| А | К | (46, 42) | (26, 44) |
|   | Н | (52, 22) | (32, 24) |

Рис. 14.

Эта картина достаточно типична для картеля, когда у каждого из членов картеля есть стимул отклониться от договора, чтобы за счет увеличения объемов продаж получить дополнительную прибыль.

Легко видеть, что и здесь у каждого из игроков есть доминирующая стратегия — (Н) — «не кооперироваться». В результате страны получают прибыль 32 и 24 (млн. долларов в день), что гораздо меньше, нежели в ситуации кооперативного поведения.

Феномен, с которым мы столкнулись в этом примере, аналогичен «Дилемме Заключенного», и именно поэтому второй пример мы также назвали «Дилеммой Заключенного»: оба игрока играют свои доминирующие стратегии, максимизируя тем самым свои выигрыши, но в то же время исход для каждого из них хуже, нежели в ситуации, когда оба следуют доминируемым стратегиям.

Можно ли достичь «кооперативного поведения» в «Дилемме Заключенного»? Как мы увидим в следующей главе — да.

Здесь мы ограничимся лишь еще одним примером на эту же тему.

«Дилемма Заключенного — 3». Предположим, что есть 2 работника, которые могут «работать» ( $s_i = 1$ ) и «увиливать» ( $s_i = 0$ ) ( $s_i$  — уровень усилий, которые прикладывает работник  $i$ ). Суммарный выпуск «команды»  $4(s_1 + s_2)$  делится поровну между работниками. Каждый работник несет издержки, равные 3, если работает (Р), и равные 0, если увиливает (У). Соответствующая матрица изображена на рис. 15.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} P & Y \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ Y \end{array} & \left( \begin{array}{cc} (1, 1) & (-1, 2) \\ (2, -1) & (0, 0) \end{array} \right) \end{array}$$

Рис. 15.

Легко видеть, что «Р» — «Работать» — строго доминируемая стратегия для каждого работника.

*Аукцион второй цены.* У продавца есть одна единица неделимого товара. Есть  $n$  потенциальных покупателей, которые оценивают товар соответственно в  $0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n$ , и эти оценки являются «общеизвестными». Покупатели одновременно делают свои заявки (назначают цену)  $s_i \in [0, +\infty)$ . Назначивший максимальную заявку получает товар и платит вторую цену, т.е. если игрок  $i$  выигрывает ( $s_i > \max_{j \neq i} s_j$ ), то его полезность есть  $u_i = v_i - \max_{j \neq i} s_j$ , а остальные ничего не получают и ничего не платят (т.е.  $u_j = 0$ ). Если несколько

покупателей назначают высшую цену, то товар распределяется случайным образом (например, равновероятно).

Легко убедиться в том, что стратегия назначения своей оценки ( $s_i = v_i$ ) слабо доминирует все остальные. Действительно, пусть  $r_i \equiv \max_{j \neq i} s_j$ . Пусть  $s_i > v_i$ . Тогда, если  $r_i \geq s_i$ , то  $i$ -й участник получает 0, что он получил бы и при  $s_i = v_i$ . Если  $r_i \leq v_i$ , то он получает  $v_i - r_i$ , что он опять же получает, назначив  $v_i$ . Если теперь  $v_i < r_i < s_i$ , то его полезность  $v_i - r_i < 0$ , а если бы он назвал  $v_i$ , то он бы получил 0. Аналогично и для  $s_i < v_i$ : если  $r_i \leq s_i$  или  $r_i \geq v_i$ , то он получает ту же полезность, назвав  $v_i$  вместо  $s_i$ . Если же  $s_i < r_i < v_i$ , то он упускает возможность получить положительную полезность.

Полезно в данном случае заметить, что поскольку назначение собственной оценки есть доминирующая стратегия, то не играет роли, имеют ли покупатели информацию об оценках других.

Мы вернемся к аукциону второй цены в п. 1.6.

## 1.5. Рационализуемые стратегии

Мы обсуждали исключение строго доминируемых стратегий, исходя из того, что рациональный игрок никогда не выбрал бы такую стратегию, вне зависимости от того, как играют его оппоненты. Однако «общее знание» структуры игры и того, что игроки рациональны, позволяет исключить *больше*, нежели просто последовательно удалить строго доминируемые стратегии, причем здесь опять же важную роль играет «общее знание». Далее мы рассматриваем смешанное расширение  $\bar{\Gamma}$  игры  $\Gamma$ .

**Определение 1.5.1.** Стратегия  $\sigma_i$  является лучшим ответом игрока  $i$  на набор стратегий оппонентов  $\sigma_{-i}$ , если  $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i})$  при любых  $\sigma'_i \in \Sigma_i$ . Стратегия

$\sigma_i$  является «никогда не лучшим» ответом<sup>7</sup> (далее НЛО), если не существует  $\sigma_{-i}$ , для которых она была бы лучшим ответом.

Конечно же игрок не будет играть стратегию, которая является «никогда не лучшим ответом».

Ясно, что строго доминируемая стратегия является «никогда не лучшей». Разумеется, может случиться, что стратегия будет «никогда не лучшим ответом», даже если она не является строго доминируемой (мы еще вернемся к этому). Таким образом, удаляя «никогда не лучшие ответы», мы должны удалить по крайней мере и все стратегии, удаляемые при последовательном удалении строго доминируемых стратегий. Более того, предполагая «общее знание», мы можем итерировать удаление «никогда не лучших ответов». Рациональный игрок не должен играть НЛО, как только он исключает возможность того, что его противники могут играть НЛО и т. д.

Стратегии, остающиеся после такого итеративного удаления, — это те стратегии, которые рациональный игрок может оправдать, или *рационализировать*, разумеется, при некоторых разумных предположениях о выборе своих противников.

**Определение 1.5.2.** Стратегии в  $\Sigma_i$ , которые выдерживают последовательное удаление НЛО, называются *рационализуемыми стратегиями*<sup>8</sup>.

Понятие рационализуемых стратегий было введено независимо Бернхеймом и Пирсом (Bernheim, 1984; Pearce, 1984).

Можно показать, что так же, как и при последовательном удалении строго доминируемых стратегий, порядок удаления не существен. Заметим, что множество рационализуемых стратегий не может быть шире, чем множество стратегий, «выживающих» при последовательном удалении строго

---

<sup>7</sup>Never a best response.

<sup>8</sup>Rationalizable strategies.

доминируемых стратегий, поскольку на каждом шаге процесса, определяющего множество рационализируемых стратегий, все стратегии, строго доминируемые на данном шаге, удаляются.

П р и м е р (Osborn, Rubinstein) (см. рис. 16).

|       | $b_1$  | $b_2$   | $b_3$  | $b_4$    |
|-------|--------|---------|--------|----------|
| $a_1$ | (0, 7) | (2, 5)  | (7, 0) | (0, 1)   |
| $a_2$ | (5, 2) | (3, 3)  | (5, 2) | (0, 1)   |
| $a_3$ | (7, 0) | (2, 5)  | (0, 7) | (0, 1)   |
| $a_4$ | (0, 0) | (0, -2) | (0, 0) | (10, -1) |

Рис. 16.

На первом шаге исключения удаляется стратегия  $b_4$ , т.к. она является НЛО, поскольку она строго доминируется смешанной стратегией  $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$  или  $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)$ . Как только исключена  $b_4$ , можно исключить  $a_4$ , т.к. она строго доминируется  $a_2$  (поскольку  $b_4$  удалена). Но дальше мы уже не можем удалить ни одну стратегию, т.к.  $a_1$  — лучший ответ на  $b_3$ ,  $a_2$  — на  $b_2$  и  $a_3$  — на  $b_1$ . Аналогично остаются  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ . Таким образом, множество рационализуемых чистых стратегий есть  $\{a_1, a_2, a_3\}$  для игрока 1 и  $(b_1, b_2, b_3)$  — для игрока 2.

Для каждой рационализуемой стратегии игрок может построить последовательность «оправданий» своего выбора без ссылок на убеждение в том, что другой игрок не будет играть НЛО-стратегию. Например, в этой игре игрок 1 может оправдать выбор  $a_2$  убеждением, что игрок 2 будет играть  $b_2$ , которое игрок 1 может оправдать убеждением, что игрок 2 будет думать, что он собирается играть  $a_2$ , что осмысленно, если игрок 1 убежден, что игрок 2 думает, что он, игрок 1, думает, что игрок 2 будет играть  $b_2$ , и т.д.

Мы отметили, что множество рационализуемых стратегий не больше, чем множество стратегий, остающихся после после-

довательного удаления строго доминируемых стратегий. Однако в случае двух игроков ( $n = 2$ ) эти два множества совпадают, так как в игре 2-х лиц (смешанная) стратегия  $\sigma_i$  является лучшим ответом на некоторую стратегию противника, если  $\sigma_i$  не является строго доминируемой. Если чистая стратегия  $s_i$  игрока  $i$  является НЛО для любой смешанной стратегии оппонента, тогда  $s_i$  строго доминируется некоторой смешанной стратегией  $\sigma_i \in \Sigma_i$ .

Рассмотрим это на примере (Mas-Colell, Whinston, Green) (рис. 17).

|     | $L$       | $R$       |
|-----|-----------|-----------|
| $U$ | $(10, 1)$ | $(0, 4)$  |
| $M$ | $(4, 2)$  | $(4, 3)$  |
| $D$ | $(0, 5)$  | $(10, 2)$ |

Рис. 17.

У игрока 1 — три стратегии  $U$ ,  $M$  и  $D$ .  $U$  — лучшая против  $L$ , но худшая против  $R$ ,  $D$  — лучшая против  $R$  и худшая — против  $L$ . С другой стороны,  $M$  «относительно неплоха» и против  $L$ , и против  $R$ . Ни одна из этих трех стратегий не доминируется никакой другой. Но если разрешить игроку 1 рандомизацию, то игра  $U$  и  $D$  с вероятностями  $1/2$  каждая дает игроку 1 ожидаемый выигрыш 5, вне зависимости от стратегии второго игрока, тем самым строго доминируя  $M$ .

Предположим, что выигрыши от использования стратегии  $M$  изменены так, что  $M$  не является строго доминируемой. Тогда выигрыши от  $M$  лежат где-то выше, чем линия, соединяющая точки, соответствующие стратегиям  $U$  и  $D$ . Здесь оси соответствуют ожидаемым выигрышам игрока 1 в случае, если игрок 2 играет  $R$  (ось  $u_R$ ) и  $L$  (ось  $u_L$ ) (см. рис. 18). Линия  $ab$  — это множество

$$\{(u_R, u_L) : \frac{1}{2}u_R + \frac{1}{2}u_L = \frac{1}{2}u_1(M, R) + \frac{1}{2}u_1(M, L)\}.$$

Является ли  $M$  здесь лучшим ответом? ДА.

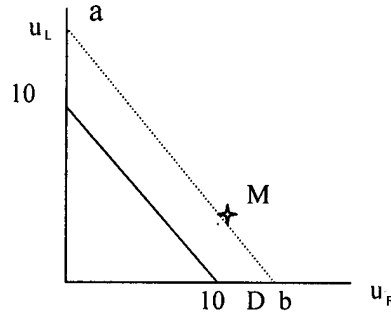


Рис. 18.

Действительно, заметим, что если игрок 2 играет  $R$  с вероятностью  $\sigma_2(R)$ , тогда ожидаемый выигрыш игрока 1 от выбора стратегии с выигрышами  $(u_R, u_L)$  есть  $\sigma_2(R)u_R + (1 - \sigma_2(R))u_L$ . Легко видеть, что  $M$  — это лучший ответ на  $\sigma_2(R) = 1/2$ ; он дает ожидаемый выигрыш, строго больший, чем ожидаемый выигрыш, достижимый с помощью стратегий  $U$  и/или  $D$ . (В случае  $n > 2$  это уже не так: могут существовать стратегии, являющиеся НЛО, но не являющиеся строго доминируемыми; это связано с тем, что рандомизация независима.)

## 1.6. Равновесие по Нэшу

Мы начнем со случая, когда рассматривается исходная игра  $\Gamma$ , а к смешанному расширению обратимся несколько позже.

**Определение 1.6.1.** Набор стратегий  $s = (s_1, \dots, s_n)$  образует равновесие по Нэшу (или ситуация  $s = (s_1, \dots, s_n)$  является равновесной по Нэшу) в игре  $\Gamma = \{I, \{S_i\}, \{u_i\}\}$ , если для любого  $i = 1, \dots, n$

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \quad \forall \quad s'_i \in S_i.$$

Иными словами, если игрок в одиночку решает отклониться от выбранной стратегии, то он разве лишь ухудшит свое положение.

В ситуации равновесия по Нэшу выбранная каждым игроком стратегия является лучшим ответом на стратегии, *действительно* «играемые» соперниками. В этом принципиальное отличие от рационализируемости, которая следует из общего знания о рациональности друг друга и структуры игры и требует только, чтобы стратегия игроков была лучшим ответом на некоторую разумную гипотезу о том, что его противник будет играть, причем под разумностью понимается, что гипотетическая игра его противников может быть также оправдана. Равновесность по Нэшу добавляет к этому требование того, чтобы игроки были *правы* в своих гипотезах. (Далее мы для краткости будем писать р.Н. для обозначения равновесия по Нэшу.)

Разумеется, полученные нами ситуации в рассмотренной ранее «Дилемме Заключенного» (во всех ее вариантах) являются равновесными по Нэшу.

**Пример.** «Семейный спор». Этот пример также относится к числу традиционных примеров, различные вариации которого встречаются в большинстве учебников. История примерно такова. Он и Она независимо (мы оставляем в стороне вопрос о разумности или неразумности подобной постановки вопроса) решают, куда пойти — на балет (Б) или футбол (Ф). Если они вместе пойдут на футбол, то Он получит больше удовольствия, чем Она; если они вместе пойдут на балет, то — наоборот. Наконец, если они окажутся в разных местах, то они не получают никакого удовольствия. Рассматриваемая ситуация моделируется следующей игрой (см. рис. 19):

|    |        |                                                                               |     |
|----|--------|-------------------------------------------------------------------------------|-----|
|    |        | ОНА                                                                           |     |
|    |        | $\Phi$                                                                        | $B$ |
| ОН | $\Phi$ | $\left( \begin{array}{cc} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{array} \right)$ |     |
|    | $B$    |                                                                               |     |

Рис. 19.

Легко видеть, что здесь есть 2 равновесия по Нэшу в чистых стратегиях —  $(\Phi, \Phi)$  и  $(B, B)$ . Мы увидим ниже, что в этой игре есть еще одно равновесие по Нэшу — в смешанных стратегиях.

**П р и м е р.** Рассмотрим следующую игру (рис. 20):

|   |                                                                                                                         |     |     |     |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|-----|
|   |                                                                                                                         | $l$ | $m$ | $r$ |
| U | $\left( \begin{array}{ccc} (5,3) & (1,4) & (3,5) \\ (4,2) & (5,5) & (4,1) \\ (3,5) & (2,7) & (5,3) \end{array} \right)$ |     |     |     |
| M |                                                                                                                         |     |     |     |
| D |                                                                                                                         |     |     |     |

Рис. 20.

Ясно, что здесь набор стратегий  $(M, m)$  образует равновесие по Нэшу. Если игрок 1 выбирает  $M$ , то у 2-го лучший ответ —  $m$  и наоборот.

**П р и м е р.** Вернемся к примеру, касавшемуся рационализуемости (рис. 16). В нем существует единственная (даже если разрешены смешанные стратегии) ситуация равновесия по Нэшу —  $(a_2, b_2)$ .

Этот пример иллюстрирует общее взаимоотношение между р.Н. и рационализуемыми стратегиями. *Каждая стратегия, являющаяся частью р.Н., рационализуема*, поскольку каждая стратегия игрока в ситуации р.Н. может быть «оправдана» равновесными стратегиями других игроков. Таким образом, равновесие по Нэшу предсказывает как минимум не хуже, чем рационализуемость, впрочем, очень часто эти предсказания оказываются значительно более «четкими».

Очень удобно следующее переопределение равновесия по Нэшу. Введем следующее многозначное отображение «лучших ответов»  $b_i : S_{-i} \rightarrow S_i$  (в игре  $\Gamma$ ):

$$b_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \quad \forall \quad s'_i \in S_i\}.$$

Тогда ситуация  $(s_1, \dots, s_n)$  является равновесием по Нэшу в игре  $\Gamma$ , если  $s_i \in b_i(s_{-i}) \quad \forall \quad i = 1, \dots, n$ .

Что же можно сказать по поводу того, а почему собственно нам нужно заниматься р.Н.? На самом деле это один из проблемных вопросов теории игр, несмотря на очень широкое использование р.Н.

- (1) *Равновесие по Нэшу как последовательность рациональных выводов (умозаключений).* Хотя это часто используется в качестве довода, тем не менее мы видим, что следствие общего знания — это необходимость играть рационализируемые стратегии. Рациональность не обязательно ведет к правильности предсказания.
- (2) *Равновесие по Нэшу как необходимое условие, если есть единственный предсказуемый исход игры.* Если игроки думают и разделяют представления о том, что существует очевидный (в частности, единственный) способ играть игру, то это должно быть р.Н. Разумеется, этот аргумент подходит, если существует единственное предсказание, как игроки будут играть. Однако, вспомнив рационализуемость, мы приходим к выводу, что этого недостаточно. Поэтому этот аргумент полезен, если есть действительно повод считать некоторый набор стратегий очевидным способом сыграть в игру.
- (3) *Фокальные точки.* Иногда случается так, что определенный исход является тем, что Шеллинг (1960) называет *фокальным исходом* (2-х человек просят независимо назвать какое-то место встречи, и если их выбор совпадет, то они получают выигрыш). Это, конечно, явный кандидат, но только если он р.Н.

(4) *Равновесие по Нэшу как самофорсирующее соглашение.*

Если игроки перед игрой имеют возможность предварительных необязывающих переговоров, и если они соглашаются на какой-то исход, то это, конечно, очевидный кандидат. Чтобы он стал самофорсирующим, нужно, чтобы он был р.Н. Хотя даже, если они договорились играть р.Н., они все равно могут отклониться, если ожидают, что другие могут тоже уклониться.

(5) *Равновесие по Нэшу как устойчивое социальное соглашение.*

Определенный способ играть в игру может возникнуть во времени, если игра разыгрывается повторно и появляется некоторое устойчивое социальное соглашение. Если это так, то для игроков может быть «очевидным», что это соглашение будет поддерживаться. Это соглашение становится, так сказать, фокальным.

Более подробное обсуждение этой проблематики можно найти, например, в учебнике Mas-Colell, Whinston, Green.

**Пример. Аукцион второй цены.** В п.1.4 мы показали, что стратегия назначения своей цены ( $s_i = v_i$ ) слабо доминирует все остальные стратегии. Оказывается (см., например, Moulin, 1986), что в этой игре *много* равновесий по Нэшу. Точнее, для любого игрока  $i$  и для любой заявки  $s$  такой, что  $0 < s \leq v_i$  существует по крайней мере одно равновесие по Нэшу, при котором игрок  $i$  платит  $s$  и получает товар.

Действительно, выберем  $i \in I$ , зафиксируем  $s \in (0, v_i]$  и положим:

$$x_i^* = \max_{1 \leq j \leq n} v_j + 1,$$

$$x_j^* = s \quad \forall j \neq i.$$

Тогда  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  — равновесие по Нэшу.

В этом случае единственная возможность отклониться у игрока  $i$  — это уступить товар кому-либо другому, получая в этом случае нулевой выигрыш. Единственная возможность

игрока  $j$ ,  $j \neq i$  — это получить товар, заплатив цену  $x_i^*$ , превосходящую  $v_j$ , получая тем самым отрицательный выигрыш.

## 1.7. Равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях

Примеры, которые мы рассмотрели выше, продемонстрировали, что даже в очень простых играх равновесие по Нэшу в чистых стратегиях может быть не единственным. Однако, как мы увидим сейчас, равновесия в чистых стратегиях может не существовать вообще.

**П р и м е р.** «Игра в орлянку» или «Орел или решка». 2 игрока одновременно, независимо выбирают либо «решку», либо «орла». Если их выбор различен, то первый игрок платит второму 1 рубль (доллар, и т. д.), если их выбор одинаков, то наоборот — второй платит первому столько же. Соответствующая игра имеет следующий вид (рис.21):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & p \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ p \end{array} & \left( \begin{array}{cc} (1, -1) & (-1, 1) \\ (-1, 1) & (1, -1) \end{array} \right) \end{array}$$

Рис. 21.

Легко видеть, что в этой игре нет равновесия по Нэшу в чистых стратегиях, так как в любой ситуации одному из игроков выгодно отклониться от выбранной стратегии. Однако, как мы увидим, пара смешанных стратегий  $\sigma_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $\sigma_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , в которых каждый из игроков играет свои чистые стратегии с равными вероятностями, образует равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.

**Определение 1.7.1.** Ситуация (набор смешанных стратегий)  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  является равновесием по Нэшу в игре

$\bar{\Gamma} = \{I, \{\Sigma_i\}, \{u_i\}\}$ , если для любого  $i = 1, \dots, n$

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) \quad \forall \quad \sigma'_i \in \Sigma_i.$$

**Предложение 1.7.1.** Пусть  $S_i^+ \subset S_i$  — множество чистых стратегий, которые игрок  $i$  играет с положительной вероятностью в ситуации  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ . Ситуация  $\sigma$  является р.Н. в смешанном расширении  $\bar{\Gamma}$  игры  $\Gamma$  тогда и только тогда, когда для всех  $i = 1, \dots, n$

$$(1) \quad u_i(s_i, \sigma_{-i}) = u_i(s'_i, \sigma_{-i}) \quad \forall \quad s_i, s'_i \in S_i^+$$

$$(2) \quad u_i(s_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(s'_i, \sigma_{-i}) \quad \forall \quad s_i \in S_i^+, s'_i \notin S_i^+.$$

**Доказательство.** Необходимость. Если бы одно из этих условий не выполнялось для некоторого  $i$ , то нашлись бы две стратегии  $s_i \in S_i^+$  и  $s'_i \in S_i : u_i(s'_i, \sigma_{-i}) > u_i(s_i, \sigma_{-i})$ , а значит, это не р.Н.

Достаточность. Предположим теперь, что (1) и (2) выполнены, но  $\sigma$  — не р.Н. Тогда существуют игрок  $i$  и стратегия  $\sigma'_i$  такие, что

$$u_i(\sigma'_i, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}).$$

Но если это так, то существует чистая стратегия  $s'_i$ , которая играет с положительной вероятностью при  $\sigma'_i$  и для которой  $u_i(s'_i, \sigma_{-i}) > u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})$ . Так как  $u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = u_i(s_i, \sigma_{-i})$  для любой  $s_i \in S_i^+$ , это противоречит (1) и (2).

Таким образом, необходимые и достаточные условия того, что ситуация  $\sigma$  — р.Н., состоят в том, что: 1) каждый игрок при данном распределении стратегий, которые играют его противники, безразличен между чистыми стратегиями, которые он играет с положительной вероятностью; 2) эти чистые стратегии не хуже тех, которые он играет с нулевой вероятностью.

Это свойство можно использовать для нахождения смешанного равновесия по Нэшу (т.е. равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях).

П р и м е р. Рассмотрим следующую игру (рис.22):

|          |              |            |
|----------|--------------|------------|
|          | <i>A</i>     | <i>B</i>   |
| <i>A</i> | (1000, 1000) | (0, 0)     |
| <i>B</i> | (0, 0)       | (100, 100) |

Рис. 22.

Очевидно, что ситуации (А,А) и (В,В) являются равновесными по Нэшу (в чистых стратегиях). Найдем равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях. Предположим, что в таком равновесии игрок 1 играет смешанную стратегию  $(p, 1-p)$ , а второй —  $(q, 1-q)$ , причем  $0 < p, q < 1$ .

Тогда, учитывая приведенное предложение, мы получаем, что ожидаемый выигрыш игрока 2 от игры *A* есть  $1000p + 0(1-p)$ , а от игры *B* есть  $100 \cdot (1-p) + 0 \cdot p$ , а значит,

$$1000p + (1-p) \cdot 0 = 100 \cdot (1-p) + 0 \cdot p.$$

Отсюда  $1100p = 100$  и, следовательно,  $p = 1/11$ . Аналогично  $q = 1/11$ . Заметим, что в соответствии с предложением 1.7.1 у игроков в данном примере нет предпочтений относительно вероятностей, которые они приписывают своим стратегиям. Эти вероятности определяют «равновесное рассмотрение»: необходимость сделать *другого* игрока безразличным относительно *его* стратегий.

П р и м е р. Вернемся к игре «Семейный спор». Поступая, как и в предыдущем примере, мы получаем, что Она, играя «Ф», получает  $1 \cdot p + 0(1-p)$ , а играя «Б», получает  $0 \cdot p + 2(1-p)$ . Следовательно,  $2(1-p) = p$ . Отсюда  $3p = 2$ , а следовательно,  $p = 2/3$ . Аналогично получаем  $2q + (1-q) \cdot 0 = 0 \cdot q + (1-q)1$ , а значит,  $3q = 1$  и  $q = 1/3$ . Таким образом, в смешанном равновесии Он играет «Ф» с вероятностью  $2/3$ , а Она играет «Ф» с вероятностью  $1/3$ .

**Замечание 1.7.1.** В определении смешанного расширения или равновесия в смешанных стратегиях мы предполагаем, что игроки осуществляют рандомизацию своих

чистых стратегий независимо. Иными словами, мы можем считать, например, что Природа передает игрокам индивидуальные, независимо распределенные сигналы  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ , а каждый игрок  $i$  принимает решение в зависимости от различных возможных реализаций его сигнала  $\Theta_i$ .

Предположим, однако, что есть некий общий сигнал  $\Theta \in [0, 1]$ , который могут наблюдать все игроки. В этом случае появляются новые возможности. Так, к примеру, в упомянутой только что игре «Семейный спор» оба игрока могут, например, решить идти на футбол, если, скажем,  $\theta < \frac{1}{2}$ , и идти на балет, если  $\theta \geq \frac{1}{2}$ . Выбор стратегии каждым игроком остается случайным, тем не менее здесь мы имеем дело со вполне скоординированными действиями (Он и Она оказываются вместе), явно имеющими равновесный характер, причем если один игрок решает следовать этому правилу, то и для второго оптимально придерживаться этого же правила. Это дает нам пример коррелированного равновесия (совместного равновесия)<sup>9</sup>, введенного Р. Ауманом (Aumann, 1974).

Формально такое равновесие — это специальный случай равновесия по Байесу-Нэшу, которое мы рассмотрим в главе 3.

Далее мы приведем важные результаты о существовании равновесий по Нэшу.

**Предложение 1.7.2.** В смешанном расширении  $\bar{\Gamma}$  любой игры  $\Gamma$  с конечными множествами стратегий  $S_1, \dots, S_n$  существует равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.

Это предложение непосредственно следует из следующего более общего результата, так как в игре  $\bar{\Gamma}$  множества стратегий игроков — это симплексы в соответствующем пространстве  $\mathbb{R}^M$ .

---

<sup>9</sup>Correlated equilibrium.

**Теорема 1.7.1.** Debreu, 1952; Glicksberg, 1952; Fan Ky, 1952)<sup>10</sup>. Если для каждого  $i = 1, \dots, n$

- (1)  $S_i$  — непусто, выпукло и компактно (в некотором  $\mathbb{R}^M$ );
- (2)  $u_i(s_1, \dots, s_n)$  — непрерывна по  $(s_1, \dots, s_n)$  и квазивогнута по  $s_i$ ,

то в игре  $\Gamma = \{I, \{S_i\}, \{u_i\}\}$  существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.

Напомним, что функция  $f : \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}$  называется квазивогнутой, если для любого  $a$  множество  $\{x : f(x) \geq a\}$  выпукло.

Доказательство этого предложения опирается на следующую лемму.

**Лемма 1.7.1.** Если выполнены условия Теоремы 1.7.1, то отображение лучших ответов  $b_i$  непусто, выпуклозначно (т. е. множества  $b_i(s_{-i})$  — непусты и выпуклы) и полунепрерывно сверху<sup>11</sup>.

**Д о к а з а т е л ь с т в о** леммы 1.7.1. Во-первых, заметим, что  $b_i(s_{-i})$  — это множество тех стратегий  $i$ -го игрока, которые максимизируют  $u_i(\cdot, s_{-i})$  на компакте  $S_i$ . Его непустота следует из непрерывности  $u_i$ . Выпуклость множества  $b_i(s_{-i})$  следует из квазивогнутости функции  $u_i(\cdot, s_{-i})$ . Чтобы проверить полунепрерывность сверху, мы должны показать, что для любой последовательности  $(s_i^k, s_{-i}^k) \rightarrow (s_i, s_{-i})$  такой, что  $s_i^k \in b_i(s_{-i}^k) \forall k$ , мы имеем  $s_i \in b_i(s_{-i})$ . Заметим, что  $\forall k$

<sup>10</sup>Русский перевод статьи Гликсберга опубликован в сб.: Бесконечные антагонистические игры. Под ред. Н. Н. Воробьева. М.: Физматгиз, 1963. В русских переводах можно встретить две версии транскрипции Fan Ky: Фань Цзи (см., например, упомянутый выше сборник) и Ки Фань (см., например, Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988).

<sup>11</sup>Многозначное отображение  $F$  называется полунепрерывным сверху (п.н.св.), если из  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \in F(x_n)$ ,  $y_n \rightarrow y$  следует  $y \in F(x)$ .

$u_i(s_i^k, s_{-i}^k) \geq u_i(s_i', s_{-i}^k) \quad \forall \quad s_i' \in S_i$ . В силу непрерывности  $u_i(\cdot)$ ,  
 $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о** Теоремы. Определим отображение  $b : S \rightarrow S$  формулой

$$b(s_1, \dots, s_n) = b_1(s_{-1}) \times b_2(s_{-2}) \times \dots \times b(s_{-n}).$$

Ясно, что  $b(\cdot)$  — многозначное отображение  $S = S_1 \times \dots \times S_n$  в себя. По лемме  $b(\cdot)$  непусто, выпукло-значно, полунепрерывно сверху. Следовательно, по Т.Какутани о неподвижной точке, существует неподвижная точка, т.е. набор стратегий  $s \in S : s \in b(s)$ . Этот набор стратегий является равновесием по Нэшу, т.к. по построению

$$s_i \in b_i(s_{-i}) \quad \forall \quad i = 1, \dots, n.$$

**П р и м е р.** «Голосование». Рассмотрим следующую ситуацию — три игрока 1, 2, 3 и три альтернативы —  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Игроки голосуют одновременно за одну из альтернатив, воздержаться невозможно. Таким образом, пространство стратегий  $S_i = \{A, B, C\}$ . Альтернатива, получившая большинство, побеждает. Если ни одна из альтернатив не получает большинства, то выбирается альтернатива  $A$ . Функции выигрышей таковы:

$$u_1(A) = u_2(B) = u_3(C) = 2,$$

$$u_1(B) = u_2(C) = u_3(A) = 1,$$

$$u_1(C) = u_2(A) = u_3(B) = 0.$$

В этой игре три равновесных исхода<sup>12</sup> (в чистых стратегиях):  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Теперь посмотрим на равновесия (их больше 3):

---

<sup>12</sup>Вообще говоря, под исходом следует понимать полное описание «результата» игры: и выбранные стратегии, и соответствующие выигрыши игроков, и, возможно, какие-то другие атрибуты (например, объявление о том, что победил такой-то игрок  $X$ ). В данном случае мы имеем в виду победившую альтернативу.

если игроки 1 и 3 голосуют за  $A$ , то игрок 2 не изменит исход, как бы он ни голосовал, и игроку 3 безразлично, как он голосует.

$(A, A, A)$  и  $(A, B, A)$  — р.Н., но  $(A, A, B)$  — не р.Н., т.к. второму лучше голосовать за  $B$ .

## 1.8. Антагонистические игры

К числу достаточно простых и потому наиболее изученных игр относятся антагонистические игры. В случае антагонистических игр, в отличие от произвольных игр, гораздо больше можно сказать о качественном характере равновесий по Нэшу.

Напомним определение игр с «нулевой суммой»:

**Определение 1.8.1.** *Игра  $\Gamma = \{I, \{S_i\}, \{u_i\}\}$  называется игрой с нулевой суммой, если для любого  $s \in S$  выполняется условие  $\sum_{i=1}^n u_i(s_1, s_2, \dots, s_n) = 0$ .*

Иными словами, такая игра представляет собой замкнутую систему: все то, что кто-нибудь выиграл, должно быть кем-то проиграно. Большинство салонных игр являются играми такого типа.

Будем далее считать, что  $I = \{1, 2\}$ .

**Определение 1.8.2.** *Игра  $\Gamma$  двух лиц с нулевой суммой называется антагонистической.*

В такой игре интересы игроков диаметрально противоположны, поскольку  $u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0$  или  $u_1(s_1, s_2) = -u_2(s_1, s_2)$ ,  $\forall s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$ . К числу примеров антагонистических игр можно отнести игру «Орел или Решка». В этой игре каждый из двух игроков выбирает, независимо от другого, монетку, повернутую вверх либо «Орлом», либо «Решкой». Если выбор игроков различен, то игрок 2 платит игроку 1 один доллар. Если выбор совпадает, то — наоборот. Матрица выигрышей такой игры представлена на рис. 23.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} \text{«Орел»} & \text{«Решка»} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{«Орел»} \\ \text{«Решка»} \end{array} & \left( \begin{array}{cc} (-1, 1) & (1, -1) \\ (1, -1) & (-1, 1) \end{array} \right)
 \end{array}$$

Рис. 23.

Как уже отмечалось, конечная антагонистическая игра называется матричной, поскольку выигрыши игроков полностью задаются матрицей выигрышей первого игрока.

Будем говорить, что игрок  $i$  выбирает *максиминную* стратегию, если эта стратегия является наилучшей для него в предположении, что игрок  $j$  будет выбирать свою стратегию так, чтобы максимально навредить игроку  $i$ .

Рассмотрим такую стратегию на примере игры, представленной на рис. 24.

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} L_2 & C_2 & R_2 \end{array} \\
 \begin{array}{c} L_1 \\ C_1 \\ R_1 \end{array} & \left( \begin{array}{ccc} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Рис. 24.

Здесь приведена матрица выигрышей 1-го игрока. Как выбирает максиминную стратегию 1-й игрок? Он может рассуждать следующим образом: «Если я выберу свою стратегию  $L_1$ , то сколько я смогу получить?» Поскольку его противник выбирает свою стратегию так, чтобы навредить игроку 1 насколько возможно, то он в ответ на  $L_1$  ответит своей стратегией  $C_2$ . В этом случае игрок 2 проиграет лишь 1. Аналогично, если игрок 1 задумает сыграть  $C_1$ , в ответ игрок 2 ответит  $C_2$ , тогда 1-й игрок сможет выиграть лишь 2. Если же игрок 1 задумает сыграть  $R_1$ , то противник накажет его, сыграв  $L_2$ . В этом случае 1-й игрок проиграет 3, а следовательно, 2-й игрок выигрывает 3. Очевидно, что для игрока 1 наилучшим будет выбор такой стратегии, которая даст ему

максимальный выигрыш из тех минимальных, которые позволит ему выиграть игрок 2, т.е. стратегии  $C_1$ .

Аналогичные рассуждения применимы и для игрока 2 при выборе им своей максиминной стратегии.

Покажем, что если в антагонистической игре  $\Gamma$  существует равновесие по Нэшу, то пара стратегий будет являться равновесной тогда и только тогда, когда стратегия каждого игрока — максиминная. Этот в некотором смысле удивительный результат обеспечивает связь между индивидуальным принятием решения и рассуждением, объясняющим причину введения такого понятия, как равновесие по Нэшу. Мы докажем заодно, что все равновесные ситуации в антагонистических играх приводят к одним и тем же выигрышам. Это свойство редко выполняется в неантагонистических играх.

**Определение 1.8.3.** Пусть  $\Gamma$  — антагонистическая игра. Стратегия  $s_1^* \in S_1$  является максиминной для игрока 1, если

$$\min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1^*, s_2) \geq \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2), \quad \forall s_1 \in S_1.$$

Стратегия  $s_2^* \in S_2$  является максиминной для игрока 2, если

$$\min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2^*) \geq \min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2), \quad \forall s_2 \in S_2.$$

Т.е. максиминная стратегия для игрока  $i$  является стратегией, обеспечивающей ему максимальный гарантированный выигрыш. Следовательно, максиминная стратегия игрока 1 решает задачу:

$$\max_{s_1 \in S_1} \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1, s_2).$$

Аналогично максиминная стратегия 2-го игрока решает задачу:

$$\max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2).$$

Следующая очевидная лемма показывает, что нахождение максимального среди минимальных выигрышей игрока 2 эквивалентно нахождению минимума среди максимальных выигрышей игрока 1.

**Лемма 1.8.1.** Пусть  $\Gamma = \{\{1, 2\}, \{S_i\}, \{u_i\}\}$  — антагонистическая игра, тогда  $\max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2) = -\min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2)$ .

Доказательство этой леммы немедленно следует из следующих очевидных свойств:

- 1)  $\min_z (-f(z)) = -\max_z f(z)$ ;
- 2)  $\arg \min_z (-f(z)) = \arg \max_z f(z)$ .

Из этого результата следует, что стратегия  $s_2 \in S_2$  является решением задачи нахождения  $\max_{s_2 \in S_2} \min_{s_1 \in S_1} u_2(s_1, s_2)$  тогда и только тогда, когда эта стратегия  $s_2$  является решением задачи  $\min_{s_2 \in S_2} \max_{s_1 \in S_1} u_1(s_1, s_2)$ . Поэтому при поиске такой стратегии можно воспользоваться той же матрицей выигрышей игрока 1 следующим образом: сначала в каждом столбце найти максимальный элемент, затем из всех максимальных элементов выбрать минимальный. Полученное значение является «наименьшим гарантированным проигрышем» игрока 2. Это означает, что если игрок 2 будет придерживаться стратегии, соответствующих этому минимаксному значению, то при любом поведении противника он проиграет не больше этого значения.

Следующий результат устанавливает связь между равновесием по Нэшу в антагонистической игре и множеством пар максиминных стратегий.

**Предложение 1.8.1.** Пусть  $\Gamma$  — антагонистическая игра.

- a. Если  $(s_1^*, s_2^*)$  — равновесие по Нэшу в  $\Gamma$ , тогда  $s_1^*$  является максиминной стратегией игрока 1, а  $s_2^*$  — максиминной стратегией игрока 2.
- b. Если  $(s_1^*, s_2^*)$  — равновесие по Нэшу в игре  $\Gamma$ , тогда

$$\max_{s_1} \min_{s_2} u_1(s_1, s_2) = \min_{s_2} \max_{s_1} u_1(s_1, s_2) = u_1(s_1^*, s_2^*)$$

и таким образом все равновесия по Нэшу в игре  $\Gamma$  дают одни и те же выигрыши.

с. Если  $\max_{s_1} \min_{s_2} u_1(s_1, s_2) = \min_{s_2} \max_{s_1} u_1(s_1, s_2)$ ,  $s_1^*$  является максиминной стратегией игрока 1,  $s_2^*$  — максиминной стратегией игрока 2, тогда  $(s_1^*, s_2^*)$  является равновесием по Нэшу игры  $\Gamma$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о.

а, б. Пусть  $(s_1^*, s_2^*)$  — равновесие по Нэшу, тогда

$$u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2), \quad \forall s_2 \in S_2 \quad \text{или} \quad (\text{т.к. } u_2 = -u_1)$$

$$u_1(s_1^*, s_2^*) \leq u_1(s_1^*, s_2), \quad \forall s_2 \in S_2.$$

Следовательно,

$$u_1(s_1^*, s_2^*) = \min_{s_2 \in S_2} u_1(s_1^*, s_2) \leq \max_{s_1} \min_{s_2} u_1(s_1, s_2). \quad (8.1)$$

С другой стороны,

$$u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*), \quad \forall s_1 \in S_1.$$

Следовательно,  $u_1(s_1^*, s_2^*) \geq \min_{s_2} u_1(s_1, s_2)$ ,  $\forall s_1 \in S_1$ , поэтому

$$u_1(s_1^*, s_2^*) \geq \max_{s_1} \min_{s_2} u_1(s_1, s_2). \quad (8.2)$$

Таким образом, из (8.1) и (8.2) следует, что  $u_1(s_1^*, s_2^*) = \max_{s_1} \min_{s_2} u_1(s_1, s_2)$  и  $s_1^*$  является максиминной стратегией игрока 1. Аналогично можно показать, что  $s_2^*$  является максиминной стратегией игрока 2.

Т.к.  $u_2(s_1^*, s_2^*) = \max_{s_2} \min_{s_1} u_2(s_1, s_2) = -u_1(s_1^*, s_2^*)$ , то

$$u_1(s_1^*, s_2^*) = -\max_{s_2} \min_{s_1} u_2(s_1, s_2) = \min_{s_2} \max_{s_1} u_1(s_1, s_2).$$

с. Обозначим через  $v^* = \max_{s_1} \min_{s_2} u_1(s_1, s_2) = \min_{s_2} \max_{s_1} u_1(s_1, s_2)$ . Из леммы следует, что  $\max_{s_2} \min_{s_1} u_2(s_1, s_2) = -v^*$ . Поскольку  $s_1^*$  — максиминная стратегия 1-го игрока, то  $u_1(s_1^*, s_2) \geq v^*$  для всех  $s_2 \in S_2$ . Аналогично  $s_2^*$  — максиминная стратегия 2-го игрока, поэтому

$$u_2(s_1, s_2^*) \geq -v^* \quad \text{для всех } s_1 \in S_1.$$

Положим в этих неравенствах  $s_2 = s_2^*$  и  $s_1 = s_1^*$ , тогда  $u_1(s_1^*, s_2^*) \geq v^*$  и  $u_2(s_1^*, s_2^*) \geq -v^*$ . Но так как  $u_1 = -u_2$ , то  $u_1(s_1^*, s_2^*) \leq v^*$ . Отсюда следует, что  $u_1(s_1^*, s_2^*) = v^*$ . Получим  $u_1(s_1^*, s_2) \geq u_2(s_1^*, s_2^*)$  или, подставляя  $u_1 = -u_2$  имеем,  $u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_2(s_1^*, s_2)$ . А из второго неравенства  $u_2(s_1, s_2^*) \geq -u_1(s_1^*, s_2^*)$  или  $u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*)$ . Значит, пара  $(s_1^*, s_2^*)$  является равновесием по Нэшу.

Заметим также, что из свойств (а), (с) следует, что равновесные стратегии являются взаимозаменяемыми в том смысле, что если  $(s_1, s_2)$  и  $(s'_1, s'_2)$  образуют равновесия, то и  $(s_1, s'_2)$ ,  $(s'_1, s_2)$  также образуют равновесия по Нэшу.

Свойство (b) показывает, что

$$\max_{s_1} \min_{s_2} u_1(s_1, s_2) = \min_{s_2} \max_{s_1} u_1(s_1, s_2)$$

для всех антагонистических игр, в которых существует равновесие по Нэшу.

В более общем случае, когда равновесия по Нэшу в чистых стратегиях нет, выполняется более общее свойство:

$$\max_{s_1} \min_{s_2} u_1(s_1, s_2) \leq \min_{s_2} \max_{s_1} u_1(s_1, s_2).$$

Действительно, т.к. для любого  $s'_1$  имеем

$$u_1(s'_1, s_2) \leq \max_{s_1} u_1(s_1, s_2), \quad \forall s_2 \in S_2,$$

поэтому

$$\min_{s_2} u_1(s'_1, s_2) \leq \min_{s_2} \max_{s_1} u_1(s_1, s_2) \quad \forall s'_1 \in S_1.$$

Наличие равновесной ситуации предполагает выполнение противоположного неравенства. В примере «Орел или Решка» мы видим, что

$$\max_{s_1} \min_{s_2} u_1(s_1, s_2) = -1 < \min_{s_2} \max_{s_1} u_1(s_1, s_2) = 1.$$

Значит, в этой игре равновесия по Нэшу в чистых стратегиях нет, а вот во втором примере (рис. 24) мы получаем, что

$$\max_{s_1} \min_{s_2} u_1(s_1, s_2) = 2 = \min_{s_2} \max_{s_1} u_1(s_1, s_2),$$

когда игрок 1 играет  $C_1$ , а игрок 2 играет  $C_2$ . Ситуация  $(C_1, C_2)$  здесь является равновесной по Нэшу.

Если оказывается, что в антагонистической игре  $\Gamma$

$$\max_{s_1} \min_{s_2} u_1(s_1, s_2) = \min_{s_2} \max_{s_1} u_1(s_1, s_2) = v^*,$$

то говорят, что этот равновесный выигрыш 1-го игрока является значением игры. И, как следует из доказательства предложения, если  $v^*$  является значением антагонистической игры, то это значит, что любая равновесная стратегия игрока 1 гарантирует ему выигрыш по крайней мере не меньше его равновесного выигрыша  $v^*$ , а любая равновесная стратегия игрока 2 гарантирует ему не меньше его равновесного выигрыша  $-v^*$ .

Поэтому любая такая стратегия игрока 2 гарантирует, что игрок 1 получит выигрыш не больше его равновесного. В неантагонистических играх равновесные стратегии игроков такими свойствами уже не обладают.

В заключение этого параграфа мы приведем классическую теорему о минимаксах, впервые доказанную Дж. фон Нейманом в 1928 г. (von Neumann, 1928)<sup>13</sup>.

#### **Теорема о минимаксах.**

*Если  $\langle \{1, 2\}, \{\Sigma_1, \Sigma_2\}, \{u_1, u_2\} \rangle$  — смешанное расширение матричной игры, то*

$$\max_{\sigma_1 \in \Sigma_1} \min_{\sigma_2 \in \Sigma_2} u_1(\sigma_1, \sigma_2) = \max_{\sigma_2 \in \Sigma_2} \min_{\sigma_1 \in \Sigma_1} u_1(\sigma_1, \sigma_2).$$

Эта теорема фактически утверждает, что в произвольной матричной игре существует равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях (ср. Предложение 1.7.2).

<sup>13</sup>Русский перевод статьи Дж. фон Неймана опубликован в сб.: Матричные игры. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.

## 1.9. Примеры

### 1.9.1. Модель дуополии по Курно

Предположим, что две фирмы  $i = 1, 2$  производят однородный продукт и  $q_1, q_2$  — объемы производства этого продукта. Обратная функция спроса имеет вид (для простоты)  $P(Q) = a - Q$ , где  $Q = q_1 + q_2$ , ( $P(Q) = a - Q$ , при  $Q < a$ , и  $P(Q) = 0$ , при  $Q \geq a$ ). Функции затрат  $C_i(q_i) = cq_i$  ( $c < a$ ) (нет фиксированных затрат и предельные затраты постоянны).

Фирмы выбирают  $q_i$  *одновременно* и независимо. Здесь два игрока, стратегии  $S_i = [0, +\infty)$ . (В действительности ни одна фирма не будет производить  $q_i > a$ .) Фирмы максимизируют свои прибыли:

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i(P(q_i + q_j) - c) = q_i[a - (q_i + q_j) - c].$$

Если пара  $(q_1^*, q_2^*)$  — р.Н., то  $q_i^*$  решает задачу

$$\max \pi_i(q_i, q_j^*).$$

Предположим  $q_j^* < a - c$  (можно доказать, что это действительно так), тогда условие 1 порядка<sup>14</sup> дает нам  $q_i = \frac{1}{2}(a - q_j^* - c)$ . Тогда

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{1}{2}(a - q_2^* - c) \\ q_2^* = \frac{1}{2}(a - q_1^* - c) \end{cases} \Rightarrow q_1^* = q_2^* = \frac{a - c}{3} \quad (< a - c).$$

Заметим, что монопольный выпуск был бы  $(a - c)/2$ .

При исследовании дуополии по Курно важную роль играют функции лучших ответов (кривые реагирования) — это функции вида

$$R_2(q_1) = \frac{1}{2}(a - q_1 - c),$$

$$R_1(q_2) = \frac{1}{2}(a - q_2 - c).$$

---

<sup>14</sup>Мы всегда будем ограничиваться рассмотрением лишь условия I порядка (в тех случаях, когда это необходимо), считая, что они определяют решение (не упоминая условия II порядка, поскольку в тех ситуациях, которые мы будем рассматривать, это действительно будет излишне).

Таким образом,  $R_i(q_j)$  — это объем выпуска  $i$ -й фирмы, максимизирующий ее прибыль, при условии, что  $j$ -я фирма производит  $q_j$ . Кривые реагирования изображены на рис. 25.

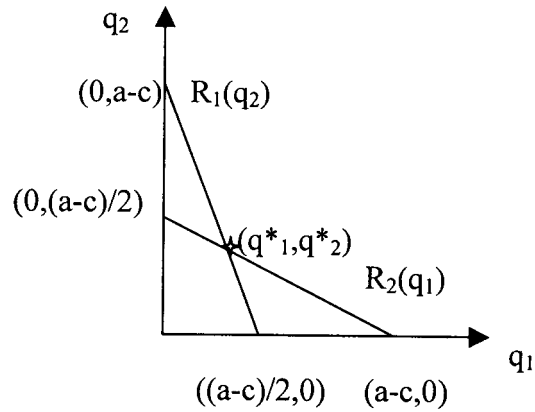


Рис. 25.

Точка пересечения кривых реагирования определяет равновесие по Курно, т. е. равновесие по Нэшу в модели дуополии по Курно.

### 1.9.2. Равновесие по Нэшу в дуополии по Курно как результат обучения

Мы будем предполагать сейчас, что игроки пытаются предсказывать игру своих оппонентов, «используя свой предыдущий опыт». Эта идея восходит еще к Курно, который рассматривал своеобразный динамический вариант нахождения равновесия. При этом игроки выбирали объем выпуска по очереди как лучший ответ, исходя из выбора оппонента на предыдущем шаге, предполагая («гипотеза Курно»), что он (оппонент) оставит свой объем выпуска без изменения.

Точнее, если игрок 1 делает ход в период 0 и выбирает  $q_1^0$ , то выпуск игрока 2 в период 1 есть  $q_2^1 = r_2(q_1^0)$ , где  $r_2(\cdot)$  —

функция реагирования второго игрока. Затем

$$q_1^2 = r_1(q_2^1) = r_1(r_2(q_1^0)).$$

Если этот процесс сходится к  $(q_1^*, q_2^*)$ , то  $q_2^* = r_2(q_1^*)$  и  $q_1^* = r_1(q_2^*)$ , т. е.  $(q_1^*, q_2^*)$  — р.Н. Если процесс сходится к некоторому состоянию  $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$  для любого начального состояния, достаточно близкого к нему, то говорят, что состояние  $(\bar{q}_1, \bar{q}_2)$  — асимптотически устойчиво, а сам процесс называется процессом нащупывания (см. рис. 26)<sup>15</sup>.

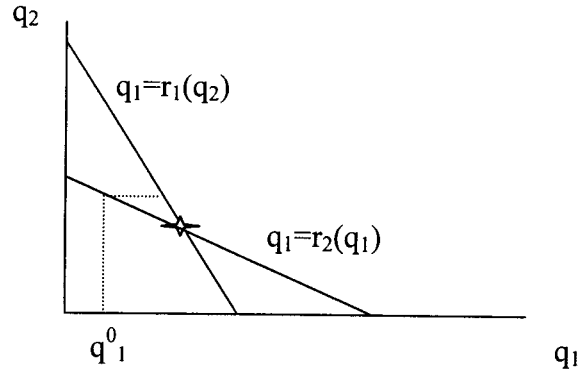


Рис. 26.

В общем случае картина может быть более сложной (см. рис. 27):

$C$ ,  $E$ ,  $G$  — неустойчивы (к ним процесс не сходится, если только не начинается в них самих),  $B$ ,  $D$  и  $F$  — устойчивы.

Вообще говоря, достаточное условие устойчивости выглядит следующим образом:

$$\left| \frac{dr_1}{dq_2} \right| \cdot \left| \frac{dr_2}{dq_1} \right| < 1.$$

<sup>15</sup>Вообще говоря, этот процесс можно рассматривать и без чередования ходов, когда каждая фирма на следующем шаге выбирает объем выпуска как лучший ответ на предыдущий выбор конкурента (см., например, Fudenberg, Levine, 1998).

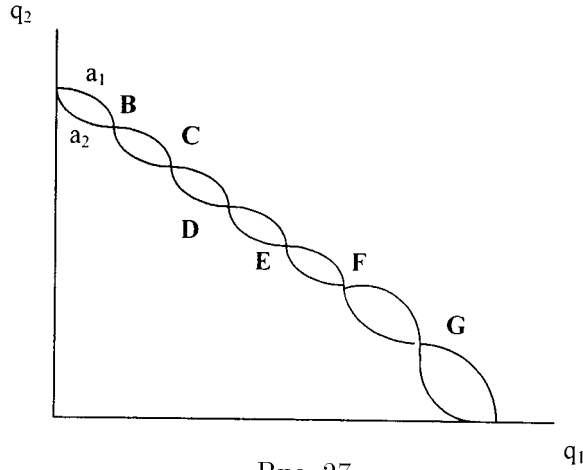


Рис. 27.

Заметим, что если функции выигрышей дважды непрерывно дифференцируемы, то наклон функции реагирования  $i$ -й фирмы есть

$$\frac{dr_i}{dq_j} = -\frac{\partial^2 u_i}{\partial \pi_i \partial q_j} / \frac{\partial^2 \pi_i}{\partial q_i^2}.$$

### 1.9.3. Дуополия по Бертрону

**1. Парадокс Бертрона.** Рассмотрим ситуацию, когда две фирмы (как в дуополии по Курно) производят однородный продукт, но теперь мы предположим, что фирмы одновременно и независимо объявляют цену, по которой они готовы продавать свою продукцию. Тогда спрос, с которым сталкивается каждая фирма, определяется следующим образом:

$$D_i(p_i, p_j) = \begin{cases} D(p_i), & \text{если } p_i < p_j, \\ D(p_i)/2, & \text{если } p_i = p_j, \\ 0, & \text{если } p_i > p_j. \end{cases}$$

Иными словами, фирма, назначившая меньшую цену, «получает» весь спрос, а если цены одинаковы, то потребители покупают продукцию фирм равновероятно.

Предположим, что цены  $(p_1^*, p_2^*)$  образуют равновесие по Нэшу. Во-первых, очевидно, что  $p_i^* \geq c$ , так как назначение цены ниже предельных затрат приведет к отрицательной прибыли, чего не может быть в равновесии, т. к. цена, равная предельным затратам, обеспечивает нулевую прибыль. Далее, ни одна из цен  $p_i^*$  не может быть выше  $c$ . Действительно, предположим для определенности, что  $p_1^* > c$ , тогда, если  $p_2^* \geq p_1^*$ , то фирма 2, сталкивающаяся в этом варианте в лучшем случае с половинным спросом, может «перехватить» весь спрос, назначив цену  $p'_2 = p_1^* - \varepsilon$  для достаточно малого  $\varepsilon > 0$  и тем самым улучшив свое положение. Если же  $p_1^* > p_2^* > c$ , то фирма 1 аналогично может назначить цену  $p'_1 = p_2^* - \varepsilon$ , «перехватывая» весь спрос.

Таким образом, в равновесии по Бертранию (или в равновесии по Нэшу в дуополии по Бертранию)  $p_1^* = p_2^* = c$  и фирмы получают нулевую прибыль. Это и есть парадокс Бертрана.

Как можно избежать этой парадоксальной ситуации? Во-первых, можно ввести условие ограничения мощности фирм, то есть считать, что есть цены, при которых фирмы не могут обеспечить весь спрос. Во-вторых, можно снять условие однократности этой игры, и это, как мы увидим позднее в гл. 2, существенно меняет ситуацию. Наконец, можно избавиться от предположения об однородности продукции.

**2. Рассмотрим ситуацию с дифференцированной продукцией.** Фирмы 1 и 2 выбирают цены  $p_1$  и  $p_2$  одновременно и независимо. Спрос, с которым сталкивается фирма  $i$ ,  $q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j$ , где  $b > 0$  отражает степень заменяемости  $i$ -го продукта  $j$ -м. (Мы не обсуждаем здесь реалистичность такой функции спроса.) Предельные затраты есть  $c$ ,  $c < a$ . Пространство стратегий — это  $S_i = [0, \infty)$  — фирмы выбирают цены. Тогда прибыль  $i$ -й фирмы определяется равенством

$$\pi_i(p_i, p_j) = q_i(p_i, p_j)[p_i - c] = [a - p_i + bp_j][p_i - c].$$

Пара  $(p_1^*, p_2^*)$  образует р.Н., если  $\forall i$   $p_i^*$  решает задачу

$$\max_{0 \leq p_i < \infty} \pi_i(p_i, p_j^*) = \max[a - p_i + bp_j^*][p_i - c].$$

Решение задачи для  $i$ -й фирмы есть

$$p_i^* = \frac{1}{2}(a + bp_j^* + c),$$

то есть

$$\begin{aligned} p_1^* &= \frac{1}{2}(a + bp_2^* + c), \\ p_2^* &= \frac{1}{2}(a + bp_1^* + c). \end{aligned}$$

Следовательно,  $p_1^* = p_2^* = (a + c)/(2 - b)$

#### 1.9.4. «Проблема общего»

Рассмотрим следующую очень стилизованную модель (Hardin, 1968). Представим себе, что есть  $n$  фермеров. Летом их козы (коровы) пасутся на зеленом поле. Обозначим через  $g_i$  число коз у  $i$ -го фермера, тогда численность всего стада  $G = g_1 + \dots + g_n$ . Затраты на покупку и содержание козы равны  $c$  (независимо от числа коз у фермера). Ценность (стоимость) одной козы при общем числе коз  $G$  есть  $v(G)$ .

Предполагая, что козе необходим определенный уровень минимального пропитания (для выживания), считаем, что есть некоторое максимальное число коз, которое может прокормиться,  $G_{\max}$ :  $v(G) > 0$  для  $G < G_{\max}$ , но  $v(G) = 0$  для  $G \geq G_{\max}$ . Можно предположить, что если есть одна коза, то она спокойно прокормится; можно добавить еще одну и т.д., но с ростом числа коз естественно считать, что ценность падает, т.е.  $v'(G) < 0$ , ( $G < G_{\max}$ ), и  $v''(G) < 0$ .

Весной фермеры выбирают (одновременно и независимо), сколько заводят коз ( $g_i$  для  $i$ -го фермера). Выигрыш фермера  $i$  есть

$$g_i v(g_1 + \dots + g_n) - c g_i. \quad (*)$$

Следовательно, если  $(g_1^*, \dots, g_n^*)$  — р.Н., то  $g_i^*$  должно максимизировать  $(*)$  при  $(g_1^*, \dots, g_{i-1}^*, g_{i+1}^*, \dots, g_n^*)$ . Условие  $I$  порядка есть

$$v(g_i + G_{-i}^*) + g_i v'(g_i + G_{-i}^*) - c = 0,$$

где

$$G_{-i}^* = \sum_{k \neq i} g_k^*.$$

Подставим в это равенство  $g_i^*$  и, просуммировав по  $i$ , получаем (разделив на  $n$ )

$$v(G^*) + \frac{1}{n} G^* v'(G^*) - c = 0.$$

Рассмотрим теперь, что произойдет, если «социальный плановик» будет искать социальный оптимум, то есть решать задачу нахождения

$$\max_{0 \leq G \in \infty} Gv(G) - Gc.$$

Здесь условие  $I$  порядка есть

$$v(G^{**}) + G^{**} v'(G^{**}) - c = 0.$$

Нетрудно проверить, что  $G^* > G^{**}$ , т.е. коз слишком много! Иными словами, общие ресурсы используются слишком интенсивно.

## 1.10. Равновесие «дрожащей руки»

Мы уже обсуждали ранее слабо доминируемые стратегии и сейчас вновь обратимся к ним. Рассмотрим игру, изображенную на рис. 28.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} U \\ D \end{array} & \left( \begin{array}{cc} (2, 2) & (0, -2) \\ (-2, 0) & (0, 0) \end{array} \right) \end{array}$$

Рис. 28.

Легко видеть, что в этой игре два р.Н. в чистых стратегиях  $(U, L)$  и  $(D, R)$ , причем второе равновесие характерно тем, что оба игрока выбирают свои слабо доминируемые стратегии.

Мы остановимся сейчас на понятии совершенного равновесия (по Нэшу) «дрожащей» руки игры в нормальной форме<sup>16</sup>, определение которого восходит к работе Рейнхарда Зельтена<sup>17</sup> (Selten, 1975). Такое равновесие «выдерживает» возможность того, что с некоторой очень небольшой вероятностью игроки делают ошибки (грубо говоря, «дрожащей рукой» не попадая на нужные кнопки).

Для произвольной игры в нормальной форме  $\Gamma = \{I, (\Sigma_i), (u_i)\}$  можно определить «возмущенную» игру  $\Gamma_\varepsilon = \{I, (\Sigma_i^\varepsilon), (u_i)\}$ , выбирая для каждого игрока  $i$  и каждой чистой стратегии  $s_i \in S_i$  числа  $\varepsilon_i(s_i) \in (0, 1)$  так, что  $\sum_{s_i \in S_i} \varepsilon_i(s_i) < 1$ , и затем, определяя множество «возмущенных» стратегий как

$$\Sigma_i^\varepsilon = \{\sigma_i \in \Sigma_i : \sigma_i(s_i) \geq \varepsilon_i(s_i) \text{ для всех } s_i \in S_i \text{ и} \\ \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\}.$$

Иными словами, в игре  $\Gamma_\varepsilon$  каждый игрок  $i$  играет каждую свою стратегию  $s_i$  с вероятностью не меньшей, чем некоторая минимальная вероятность  $\varepsilon_i(s_i)$ , которая интерпретируется как неизбежная вероятность сыграть  $s_i$  по ошибке.

**Определение 1.10.1.** *Равновесие по Нэшу  $\sigma$  в игре (в нормальной форме)  $\Gamma = \{I, (\Sigma_i), (u_i)\}$  называется равновесием «дрожащей руки», если существует такая последовательность возмущенных игр  $\{\Gamma_{\varepsilon_k}\}_{k=1}^\infty$ , сходящихся к  $\Gamma$  (в том смысле, что  $\lim \varepsilon_i^k(s_i) = 0$  для любых  $i \in I$  и  $s_i \in S_i$ ), что существует последовательность равновесий (в соответствующих играх  $\Gamma_{\varepsilon_k}$ )  $\{\sigma^k\}_{k=1}^\infty$ , сходящаяся к  $\sigma$ , т. е.  $\lim \sigma^k = \sigma$ .*

<sup>16</sup>Normal form trembling hand perfect Nash equilibrium.

<sup>17</sup>Р. Зельтен — лауреат Нобелевской премии по экономике 1994 года.

Таким образом, рассматриваемые равновесия — это те равновесия по Нэшу, которые «выживают» при возможных ошибках.

Заметим, что в определении требуется лишь *существование* возмущенных игр<sup>18</sup>, имеющих равновесия, близкие к  $\sigma$ . Более сильным было бы требование «выживания» при *всех* возмущениях исходной игры.

**Предложение 1.10.1.** (Selten, 1975). *В смешанном расширении любой игры  $\Gamma = \{I, \{S_i\}, (u_i)\}$  с конечными множествами стратегий  $S_1, \dots, S_n$  существует равновесие «дрожащей руки».*

**Предложение 1.10.2.** (Selten, 1975). *Равновесие по Нэшу  $\sigma$  в игре в нормальной форме  $\Gamma = \{I, (\Sigma_i), (u_i)\}$  является совершенным равновесием «дрожащей руки» (в игре в нормальной форме) тогда и только тогда, когда существует последовательность таких вполне смешанных стратегий  $\sigma^k$  (т. е. стратегий, в которых все чистые стратегии играют с положительными вероятностями), что  $\sigma^k \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sigma$  и  $\sigma_i$  является лучшим ответом на любой элемент последовательности  $\{\sigma_{-i}^k\}_{k=1}^\infty$  для любого  $i = 1, \dots, n$ .*

**Предложение 1.10.3.** (Selten, 1975). *Если  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  — совершенное равновесие «дрожащей руки» (в игре в нормальной форме), то  $\sigma_i$  не является слабо доминируемой ни для какого  $i = 1, \dots, n$ .*

Легко видеть, что набор стратегий  $(D, R)$  в приведенном в начале этого раздела примере, не является совершенным равновесием «дрожащей руки».

---

<sup>18</sup>Следует иметь в виду, что под «возмущенной игрой», в отличие от использованного здесь определения, часто понимают игру, в которой, по сравнению с исходной игрой, изменены *только* функции выигрышей.

### 1.11. Дополнение. Решение биматричных игр 2 x 2

В этом параграфе мы подробно остановимся на анализе решений биматричных игр, в которых у каждого из игроков есть только две стратегии. Разумеется, эти игры представляют собой частный случай рассмотренных ранее игр, но здесь появляется возможность дать наглядную графическую интерпретацию поиска равновесных ситуаций в игре. (Наше изложение здесь следует книге Воробьева, 1985.)

Рассмотрим биматричную игру  $2 \times 2$  с матрицей

$$\begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{pmatrix}$$

или, как мы уже отмечали, игру, выигрыши в которой можно задать с помощью двух матриц:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

первая из которых описывает выигрыши игрока 1, а вторая — выигрыши игрока 2.

Очевидно, что смешанные стратегии игроков в случае игр  $2 \times 2$  полностью описываются вероятностями  $p$  и  $q$  выбора игроками своих первых чистых стратегий. (Вторые чистые стратегии выбираются, соответственно, с вероятностями  $1-p$  и  $1-q$ .) Поэтому, поскольку  $0 \leq p, q \leq 1$ , каждая ситуация в смешанных стратегиях в биматричной игре  $2 \times 2$  представляется как точка на единичном квадрате.

Напомним, что пара смешанных стратегий  $\sigma_1^* = (p^*, 1-p^*)$  и  $\sigma_2^* = (q^*, 1-q^*)$  является равновесием по Нэшу, если смешанная стратегия  $\sigma_i^*$  одного игрока является лучшим ответом на смешанную стратегию  $\sigma_j^*$  другого игрока, т. е. выполняются следующие неравенства:

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2^*) \leq U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \quad \forall \sigma_1 \text{ и}$$

$$u_2(\sigma_1^*, \sigma_2) \leq U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \quad \forall \sigma_2.$$

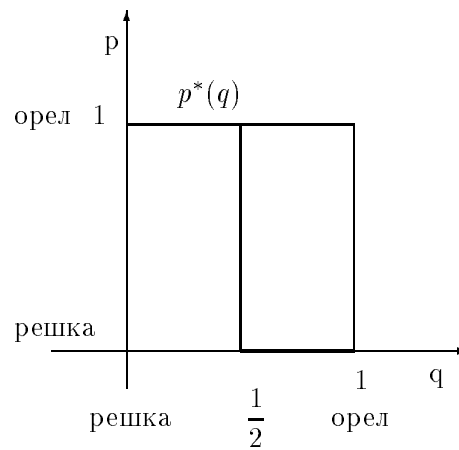
Рассмотрим уже знакомый нам пример «Орел или Решка» (см. рис. 23, п. 1.8). Пусть игрок 1 считает, что игрок 2 будет выбирать «Орла» с вероятностью  $q$  и «Решку» с вероятностью  $1 - q$ . Ожидаемый выигрыш игрока 1 от разыгрывания «Орла» будет  $(-1)q + 1 \cdot (1 - q) = 1 - 2q$ , а от разыгрывания «Решки»  $1 \cdot q + (-1) \cdot (1 - q) = 2q - 1$ . Если  $1 - 2q > 2q - 1$ , т.е.  $q < \frac{1}{2}$ , то лучшей чистой стратегией игрока 1 будет Орел, а если  $q > \frac{1}{2}$ , то Решка, и игроку 1 будет все равно, что разыгрывать, если  $q = \frac{1}{2}$ . Рассмотрим возможные смешанные стратегии игрока 1. Пусть  $(p, 1 - p)$  обозначает смешанную стратегию, в которой игрок 1 разыгрывает «Орла» с вероятностью  $p$ . Для каждого значения  $q$  мы можем вычислить значения  $p = p^*(q)$ , такие что  $(p, 1 - p)$  будет являться лучшим ответом игрока 1 на  $(q, 1 - q)$  игрока 2.

Ожидаемый выигрыш игрока 1 от разыгрывания  $(p, 1 - p)$ , когда игрок 2 разыгрывает  $(q, 1 - q)$ , будет

$$\begin{aligned} & (-1)p \cdot q + 1 \cdot p \cdot (1 - q) + 1 \cdot (1 - p) \cdot q + (-1) \cdot (1 - p)(1 - q) = \\ & = (2q - 1) + p \cdot (2 - 4q). \end{aligned}$$

Ожидаемый выигрыш игрока 1 повышается (в зависимости от  $p$ ), если  $2 - 4q > 0$  и уменьшается, если  $2 - 4q < 0$ , поэтому лучший ответ игрока 1 (среди всех стратегий, как чистых, так и смешанных) есть  $p = 1$  (т.е. Орел), если  $q < \frac{1}{2}$ , но  $p = 0$  (т.е. Решка), если  $q > \frac{1}{2}$ . Этим значениям  $p$  соответствуют два горизонтальных отрезка на рис. 29.

Так как при  $q = \frac{1}{2}$  ожидаемый выигрыш игрока 1 не зависит от его стратегии, мы получаем, что игроку 1 безразлично, выбрать ли одну из своих чистых стратегий, или же выбрать какую-нибудь смешанную стратегию  $(p, 1 - p)$ .



Это означает, что если  $q = \frac{1}{2}$ , то смешанная стратегия  $(p, 1-p)$  является лучшим ответом на смешанную стратегию  $(q, 1-q)$  при любом значении  $p$  от 0 до 1. Поэтому  $p^*(\frac{1}{2})$  представляет собой вертикальный отрезок, изображенный на рис. 29. Таким образом, ломаная линия на рис. 29 представляет собой многознач-

Рис. 29.

ное отображение (поскольку при  $q = \frac{1}{2}$  мы имеем целый отрезок) лучших ответов (в зависимости от  $q$ ).

Похожими рассуждениями и в силу симметрии матрицы выигрышей игрока 2 получаем аналогичное отображение лучших ответов игрока 2. На рис. 30 это ломаная  $q^*(p)$ .

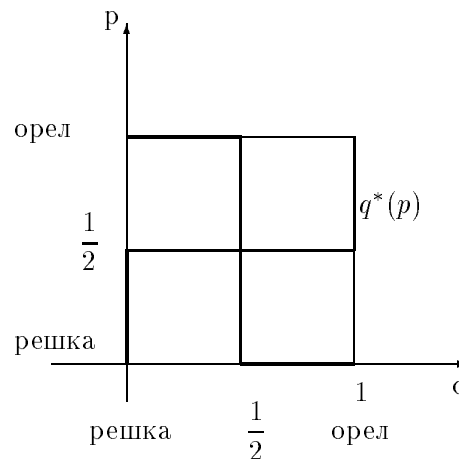


Рис. 30 показывает, что равновесие по Нэшу в игре «Орел или Решка» возникает, если игрок 1 разыгрывает смешанную стратегию  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  и игрок 2 разыгрывает такую же стратегию, что, по-видимому, было естественно ожидать в силу симметричности игры.

Рис. 30.

Важно заметить, что этот пример иллюстрирует, что неслучайно, если один из игроков выбирает свои стратегии равновероятно (т.е. придерживается своей равновесной стратегии), то второму игроку при этом абсолютно безразлично, как играть. Это следует из свойства, доказанного ранее (см. п. 1.7) в общем случае:

$$\begin{aligned} U_1(s_1, \sigma_2^*) &= U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*), \\ U_1(\sigma_1^*, s_2) &= U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \end{aligned} \quad (11.1)$$

для тех  $s_i$ , которые входят в равновесную ситуацию с ненулевыми вероятностями. Для тех же  $s'_i$ , которые входят в равновесную ситуацию с нулевой вероятностью, верны неравенства:

$$\begin{aligned} U_1(s'_i, \sigma_2^*) &\leq U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*), \\ U_1(\sigma_1^*, s'_i) &\leq U_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*). \end{aligned} \quad (11.2)$$

Формулы (11.1), (11.2) дают действенный способ определения равновесных ситуаций в произвольных биматричных играх  $2 \times 2$ .

Ожидаемый выигрыш игрока 1 от разыгрывания  $\sigma_1 = (p, 1-p)$ , когда игрок 2 разыгрывает  $\sigma_2 = (q, 1-q)$ :

$$\begin{aligned} U_1(\sigma_1, \sigma_2) &= p(a_{11}q + (1-q)a_{21} + a_{22})(p-1), \\ U_1(\sigma_1, \sigma_2) - U_1(s_1, \sigma_2) &= (a_{12} - a_{22} + q(a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}))p. \end{aligned}$$

Введем обозначения:  $C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$ ,  $\alpha = a_{22} - a_{12}$ .

Лучший ответ игрока 1 на произвольную стратегию  $\sigma_2$  игрока 2 можно получить из условий неотрицательности:

$$\begin{aligned} U_1(\sigma_1, \sigma_2) - U_1(s_1, \sigma_2) &\geq 0; \\ U_1(\sigma_1, \sigma_2) - U_1(s_2, \sigma_2) &\geq 0. \end{aligned}$$

С учетом введенных обозначений они выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} (p-1)(Cq - \alpha) &\geq 0, \\ p(Cq - \alpha) &\geq 0. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Аналогично можно поступить для нахождения лучшего ответа игрока 2.

Ожидаемый выигрыш игрока 2 от игры  $\sigma_2 = (q, 1 - q)$ , когда игрок 1 играет  $\sigma_1 = (p, 1 - p)$ :

$$\begin{aligned} U_2(\sigma_1, \sigma_2) &= q(b_{11}p + (1 - p)b_{21}) + (1 - q)(b_{12}p + (1 - p)b_{22}) = \\ &= b_{22} + (b_{12} - b_{22})p + (b_{21} - b_{22} + p(b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}))q. \end{aligned}$$

Из условий (неотрицательности)

$$U_2(\sigma_1, \sigma_2) - U_1(\sigma_1, s_1) \geq 0,$$

$$U_1(\sigma_1, \sigma_2) - U_1(\sigma_1, s_2) \geq 0,$$

обозначив  $D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$ ,  $\beta = b_{22} - b_{21}$ , получаем аналогичные неравенства для нахождения лучшего ответа игрока 2 на произвольную стратегию  $\sigma = (p, 1 - p)$  игрока 1:

$$\begin{aligned} (q - 1)(Dp - \beta) &\geq 0, \\ q(Dp - \beta) &\geq 0. \end{aligned} \tag{11.4}$$

Тогда, для того чтобы пара  $\sigma_1 = (p, 1 - p)$ ,  $\sigma_2 = (q, 1 - q)$  определяла равновесную ситуацию, необходимо и достаточно одновременное выполнение систем неравенств (11.3), (11.4), а также  $0 \leq p \leq 1$ ,  $0 \leq q \leq 1$ .

Рассмотрим лучшие ответы каждого игрока, которые, разумеется, зависят от того, как устроены матрицы выигрышей игрока 1 и игрока 2. Начнем с неравенств (11.3).

Возможны три случая:

$$\begin{aligned} 1) \quad & p = 1, Cq \geq \alpha; \\ 2) \quad & 0 < p < 1, Cq = \alpha; \\ 3) \quad & p = 0, Cq \leq \alpha. \end{aligned} \tag{11.5}$$

В свою очередь, в зависимости от соотношений между  $C$  и  $\alpha$  возможны следующие случаи и соответствующие лучшие ответы игрока 1 в каждом из них.

I. Если  $C > 0$ ,  $\alpha > 0$ , то лучшие ответы изображены на рис. 31–33:

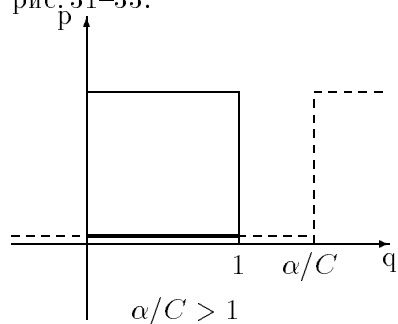


Рис. 31.

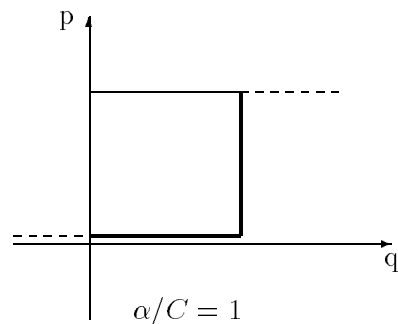


Рис. 32.

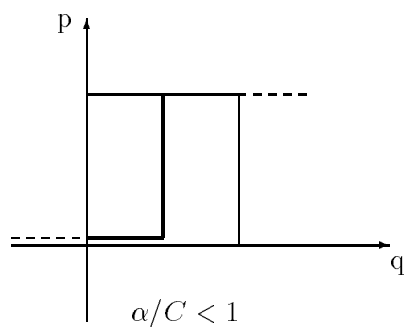


Рис. 33.

II. Если  $C < 0$ ,  $\alpha < 0$ , то лучшие ответы изображены на рис. 34–36:

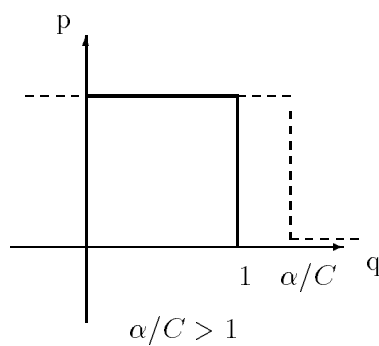


Рис. 34.

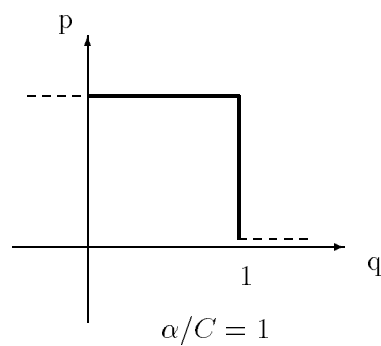
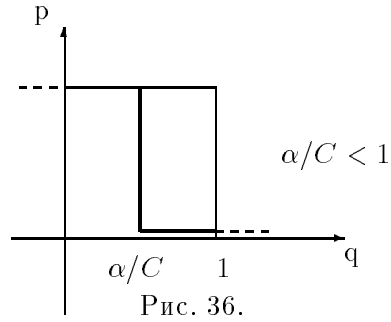
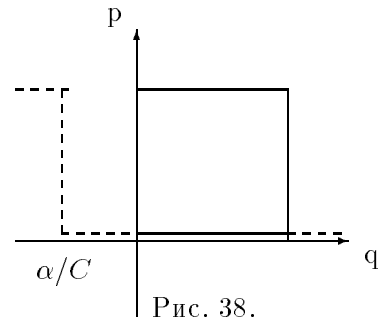
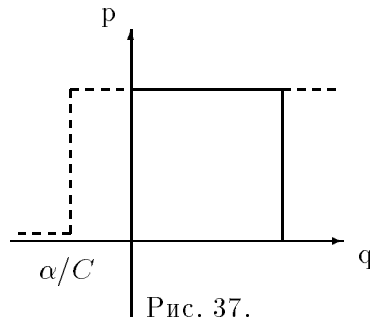


Рис. 35.



III. При  $C > 0$ ,  $\alpha < 0$  лучший ответ игрока 1 изображен на рис. 37, если, наоборот,  $C < 0$ ,  $\alpha > 0$ , то этому случаю соответствует рис. 38:



Рассмотрение случаев, когда либо  $C$ , либо  $\alpha$ , либо они вместе равны нулю, мы оставляем читателю.

Аналогично можно построить лучшие ответы игрока 2.

Равновесным ситуациям графически соответствуют точки пересечений множеств лучших ответов игроков. Совмещая графики лучших ответов игрока 1 с любым графиком наилучших ответов игрока 2, можно получить всевозможные варианты множеств равновесных ситуаций биматричной игры  $2 \times 2$ .

Рассмотрим геометрический смысл условий (11.3) и (11.4) на примере описанной выше игры «Дилемма Заключенного». Напомним, что ситуация, сложившаяся в этой игре, задается матрицей

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{молчать} & \text{сознаться} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Молчать} \\ \text{Сознаться} \end{array} & \begin{pmatrix} (-1, -1) & (-10, 0) \\ (0, -10) & (-6, -6) \end{pmatrix} \end{array}$$

Имеем  $C = -1 - (-10) - 0 + (-6) = 3$ ,  $\alpha = -6 - (-10) = 4$ ,  
 $D = -1 - 0 - (-10) + (-6) = 3$ ,  $\beta = -6 - (-10) = 4$ .

Тогда условия (11.3), (11.4) выглядят следующим образом:

$$(p-1)(3q-4) \geq 0, \quad (q-1)(3p-4) \geq 0,$$

$$p(3q-4) \geq 0, \quad q(3p-4) \geq 0.$$

Отсюда получаем, что при  $p = 1$   $q \geq \frac{4}{3}$ , при  $0 < p < 1$   $q = \frac{4}{3}$ ,  
 при  $p = 0$   $q \leq \frac{4}{3}$ ; при  $q = 1$   $p \geq \frac{4}{3}$ , при  $0 < q < 1$   $p = \frac{4}{3}$ ,  
 при  $q = 0$   $p \leq \frac{4}{3}$ . Полученные лучшие ответы изображены на рис. 39.

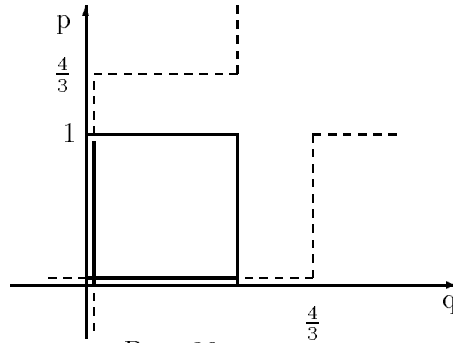


Рис. 39.

Из рисунка видно, что существует единственная ситуация равновесия  $p = 0$ ,  $q = 0$ . Это ситуация, в которой каждый из игроков выбирает вторую чистую стратегию — Сознаться.

Отметим несколько возможных качественных особенностей существующих равновесий.

1) Существует единственное равновесие по Нэшу в чистых стратегиях — например, рис. 40 дает равновесную точку  $p = 1$ ,  $q = 0$ . «Дилемма Заключенного» относится к такому случаю (здесь  $p = 1$ ,  $q = 1$ ).

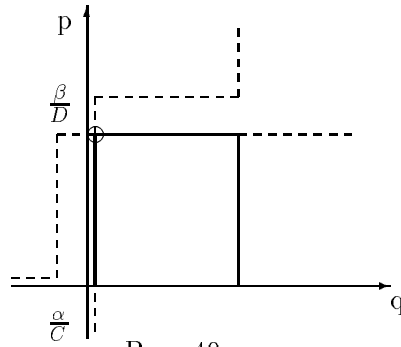


Рис. 40.

2) Существует единственное равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях. Игра «Орел» или «Решка» является примером такого случая (см. рис. 30).

3) Существует три равновесия по Нэшу — два в чистых стратегиях и одно — в смешанных. Такого типа ситуация возникает в игре «Семейный спор» (см. рис. 41).

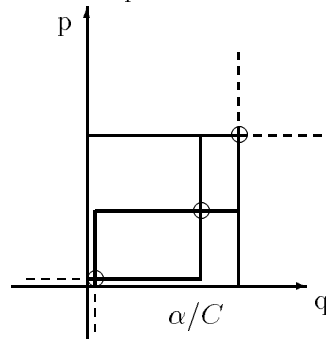


Рис. 41.

4) Существует два равновесия по Нэшу в чистых стратегиях. Такая ситуация возникает, в частности, когда в матрице  $A$  выигрышей игрока 1  $a_{12} = a_{22}$ , а в матрице  $B$  выигрышей игрока 2  $b_{12} = b_{22}$  (см. рис. 42).

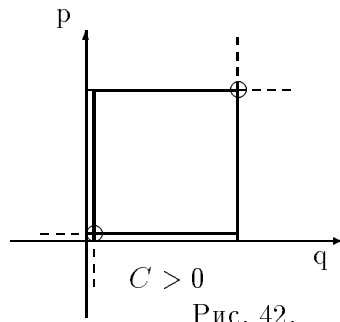


Рис. 42.

5) Существует континуум равновесий по Нэшу (в смешанных стратегиях). Примеров такого рода равновесий можно предложить очень много (см. рис. 43).

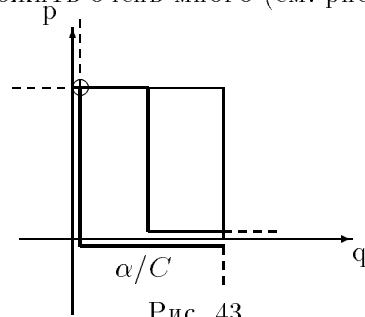


Рис. 43.

**Замечание 1.11.1.** Следует отметить интересное свойство, присущее некоторым типам равновесий. А именно, в случаях 1), 2), 3), когда равновесных ситуаций в игре нечетное число, при достаточно малых изменениях элементов матриц выигрышей зигзаги также слегка «пошевелятся», но их общая форма и характер их взаимного расположения не изменятся, а значит, не изменится и число равновесных ситуаций.

Этого нельзя сказать о случаях четного и бесконечного числа равновесных ситуаций. В этих случаях малейшее изменение элементов матриц выигрышей может приводить к совершенно иным качественным ситуациям. Например, ситуация, изображенная на рис. 42, может перейти в ситуацию либо с одним чистым равновесием, если  $\alpha = 0$ ,  $\beta < 0$  ( $b_{22} < b_{21}$ ) (см. рис. 44), либо в ситуацию с тремя равновесиями, если  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  ( $\alpha_{22} < \alpha_{21}$ ) (см. рис. 45), либо в ситуацию с континуумом равновесий, если  $\alpha > 0$ ,  $\beta = 0$  (см. рис. 46).

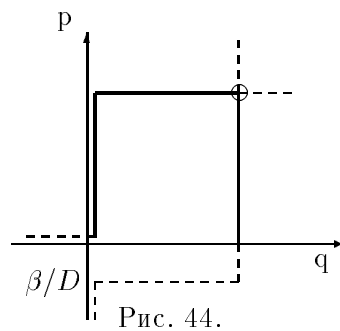


Рис. 44.

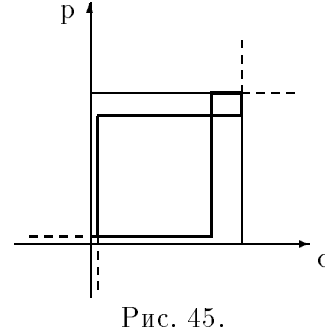


Рис. 45.

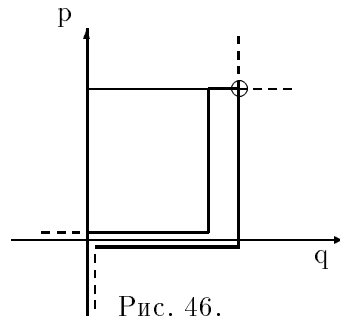


Рис. 46.

**Замечание 1.11.2.** Рассмотрим наиболее интересный случай, когда  $C$  и  $D$  не равны нулю. Тогда равновесная ситуация определяется двумя формулами  $p = \frac{\beta}{D}$ ,  $q = \frac{\alpha}{C}$ , из которых следует, что в равновесной ситуации выбор игрока 1 определяется элементами матрицы выигрышей игрока 2 и не зависит от элементов собственной матрицы, а выбор игрока 2 в равновесной ситуации полностью определяется

элементами матрицы игрока 1 и не зависит от элементов собственной матрицы. Иными словами, равновесная стратегия обоих игроков определяется не столько стремлением увеличить собственный выигрыш, сколько держать под контролем выигрыш другого игрока (минимизировать его). Таким образом, в биматричной игре мы сталкиваемся не с антагонизмом интересов, а с антагонизмом поведения.

## 1.12. Задачи

1. Какие стратегии в следующей игре, представленной в нормальной форме, выживают после последовательного исключения строго доминируемых стратегий? Найдите все равновесия по Нэшу.

|   | L      | C      | R      |
|---|--------|--------|--------|
| T | (2, 1) | (1, 1) | (4, 2) |
| M | (3, 4) | (1, 2) | (2, 3) |
| B | (1, 3) | (0, 2) | (3, 0) |

2. Игроки I и II торгуются по поводу того, как поделить один доллар. Оба игрока одновременно называют доли, которые они бы хотели иметь,  $S_1$  и  $S_2$ , где  $0 \leq S_1, S_2 \leq 1$ . Если  $S_1 + S_2 \leq 1$ , то игроки получают названные доли; если  $S_1 + S_2 > 1$ , то оба игрока ничего не получают. Каковы равновесия по Нэшу в этой игре?
3. Рассмотрим модель олигополии по Курно с  $n$  фирмами. Пусть  $q_i$  — объем произведенной продукции фирмой  $i$  и пусть  $Q = q_1 + \dots + q_n$  — общий объем продукции на рынке. Предположим, что функция обратного спроса имеет вид  $P(Q) = a - Q$  (для  $Q \leq a$ , иначе  $P = 0$ ). Полные затраты фирмы  $i$  на производство продукции в размере  $q_i$  есть  $C(q_i) = c \cdot q_i$ , то есть постоянных затрат нет, а предельные затраты постоянны и равны  $c$ , причем  $c < a$ . Фирмы выбирают свои объемы производства

одновременно. Найдите равновесие по Нэшу. Что будет происходить, если  $n$  стремится к бесконечности?

4. Рассмотрим следующий конечный вариант модели дуополии по Курно. Допустим, что каждая из фирм должна выбрать, производить ли половину монопольного объема продукции,  $q_m/2 = (a-c)/4$ , либо равновесный по Курно объем,  $q_c = (a-c)/3$ . Другие объемы производства в такой модели невозможны. Показать, что эта игра с двумя ходами эквивалентна «Дилемме Заключенного»: каждая фирма имеет строго доминируемую стратегию, и в равновесии обе фирмы оказываются в менее выгодном положении, нежели в ситуации, когда бы они выбрали сотрудничество (кооперацию).
5. Рассмотрим модель дуополии по Курно с функцией обратного спроса  $P(Q) = a - Q$ . Будем считать, что фирмы имеют асимметричные предельные затраты:  $c_1$  для  $I$ -й фирмы и  $c_2$  для  $II$ -й фирмы. Что будет являться равновесием по Нэшу, если  $0 < c_i < a/2$  для каждой фирмы? Что, если  $c_1 < c_2 < a$ , но  $2c_2 > a + c_1$ ?
6. Рассмотрим совокупность избирателей, равномерно распределенных вдоль «идеологического спектра» слева ( $x = 0$ ) направо ( $x = 1$ ). Одновременно каждый из кандидатов на одну должность (пост) выбирает платформу компании (т.е. точку на линии между  $x = 0$  и  $x = 1$ ). Избиратели наблюдают выборы кандидатов и затем каждый избиратель голосует за того кандидата, чья платформа является ближайшей к позиции избирателя на спектре. Если имеется два избирателя и они выбрали, например, платформы  $x_1 = 0,3$  и  $x_2 = 0,6$ , то все избиратели, расположенные левее  $x = 0,45$ , голосуют за кандидата 1, а все избиратели правее этой точки голосуют за кандидата 2, и кандидат 2 выигрывает выборы с 55 процентами голосов. Предположим, что кандидаты хотят только быть выбранными — в действительности

они не интересуются платформами совсем! Если имеется два кандидата, то каково равновесие по Нэшу в чистых стратегиях? Если имеется три кандидата, то каково равновесие по Нэшу в чистых стратегиях? Считаем, что любые кандидаты, которые выбрали одну и ту же платформу, поровну делят голоса, отданные за эту платформу, и что ничьи среди лидирующих кандидатов разрешаются с помощью подбрасывания монеты.

7. Показать, что в «Дилемме Заключенного» и в играх на рис. 47 и 48 нет равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

|   |  |        |        |        |   |  |        |        |        |
|---|--|--------|--------|--------|---|--|--------|--------|--------|
|   |  | L      | M      | R      |   |  | L      | C      | R      |
| u |  | (1, 0) | (1, 2) | (0, 1) | T |  | (0, 4) | (4, 0) | (5, 3) |
| d |  | (0, 3) | (0, 1) | (2, 0) | M |  | (4, 0) | (0, 4) | (5, 3) |
|   |  |        |        |        | B |  | (3, 5) | (3, 5) | (6, 6) |

Рис. 47.

Рис. 48.

8. Найти равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях для следующей игры, представленной в нормальной форме:

|   |  |        |        |
|---|--|--------|--------|
|   |  | L      | R      |
| T |  | (2, 1) | (0, 2) |
| B |  | (1, 2) | (3, 0) |

9. В каждой из двух фирм имеется по одной вакансии. Допустим, что фирмы предлагают различные зарплаты: фирма  $i$  предлагает зарплату  $w_i$ , причем  $\frac{1}{2}w_1 < w_2 < 2w_1$ . Предположим, что есть два работника, каждый из которых может обратиться только в одну фирму. Работники одновременно решают обратиться в фирму 1 или фирму 2. Если в фирму обращается только один работник, то он получает работу; если оба работника обращаются в одну и ту же фирму, фирма нанимает одного работника случайным образом

и другой работник остается безработным (имеет нулевой выигрыш). Найдите равновесие по Нэшу в игре работников, представленной в нормальной форме.

|                         |                                                                                                                                  |                         |
|-------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
|                         | Обратиться<br>в фирму 1                                                                                                          | Обратиться<br>в фирму 2 |
| Обратиться<br>в фирму 1 | $\begin{pmatrix} (\frac{1}{2}w_1, \frac{1}{2}, w_1) & (w_1, w_2) \\ (w_2, w_1) & (\frac{1}{2}w_2, \frac{1}{2}w_2) \end{pmatrix}$ |                         |
| Обратиться<br>в фирму 2 |                                                                                                                                  |                         |

10. Показать, что для равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях верно следующее утверждение: стратегии, сыгранные с положительной вероятностью в равновесии по Нэшу в смешанных стратегиях выживают в процессе последовательного исключения строго доминируемых стратегий.
11. Аукцион первой цены. Оценки игроков объекта аукциона упорядочены:  $v_1 > v_2 > \dots > v_n > 0$ . Участники одновременно делают заявки, назначая цену, которую они готовы заплатить за объект. Выигрывает назначивший наибольшую цену, которую он и платит (в случае, если несколько участников называют одну наивысшую цену, объект получает тот из участников, у которого наименьшая оценка). Найдите равновесие по Нэшу.
12. Армия  $A$  обладает единственным самолетом, который она может направить для атаки одной из трех целей. У армии  $B$  есть единственное зенитное орудие, которое она может установить для защиты одной из целей. Ценность цели  $k$  есть  $v_k$ , так что  $v_1 > v_2 > v_3 > 0$ . Армия  $A$  разрушает цель только, если она атакует незащищенную цель. Армия  $A$  стремится максимизировать ожидаемый ущерб от нападения, а  $B$  стремится его минимизировать. Найдите равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях соответствующей игры.

## Глава 2.

# Динамические игры с полной информацией

### 2.1. Позиционная форма игры

Прежде чем перейти непосредственно к теме этой главы, мы должны сделать небольшое отступление, касающееся терминологии, поскольку мы будем встречаться с терминами «полная информация», «совершенная информация», «неполная», «несовершенная информация», и т. д. Чтобы избежать возможных недоразумений, отметим следующее.

Информационную структуру игры можно охарактеризовать несколькими способами. Первый подразделяет игры на игры с совершенной и игры с несовершенной информацией. (Хотя мы еще не дали строгого определения позиционной формы игры, мы кратко описали ее в начале гл. 1.)

*В игре с совершенной информацией<sup>1</sup> каждое информационное множество одноточечно. В противном случае игра является игрой с несовершенной информацией<sup>2</sup>.*

В игре с совершенной информацией каждый игрок всегда знает точно, в каком месте дерева игры он находится, нет

---

<sup>1</sup>Perfect information.

<sup>2</sup>Imperfect information.

одновременных ходов, и все игроки наблюдают ходы Природы (если таковые есть).

*В игре с **неполной информацией**<sup>3</sup>. Природа делает ход первой и он ненаблюдаем по крайней мере одним из игроков. В противном случае игра является игрой с полной информацией<sup>4</sup>.*

Игра с неполной информацией является игрой с несовершенной информацией, так как информационные множества некоторых игроков содержат более одной вершины.

Необходимо особо подчеркнуть, что термин «неполная информация» используется в литературе часто и в другом, старом смысле, согласно которому в игре с полной информацией все игроки знают правила игры, а в противном случае игра называется игрой с неполной информацией. До 1967 г. об играх с неполной информацией (в этом смысле) говорили, когда хотели сказать, что их невозможно анализировать. Затем Дж. Харшаньи<sup>5</sup> заметил, что любая игра с неполной информацией может быть переформулирована как игра с полной, но несовершенной информацией просто за счет добавления начального хода Природы, когда Природа выбирает между различными правилами. Подробнее по этому поводу см. Rasmussen, 1989.

Итак, рассмотрим теперь более подробно позиционную форму игры.

Рассмотрим простейший пример — игру «крестики-нолики» на поле  $3 \times 3$ . Перенумеруем соответствующие клетки

|   |   |   |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 |

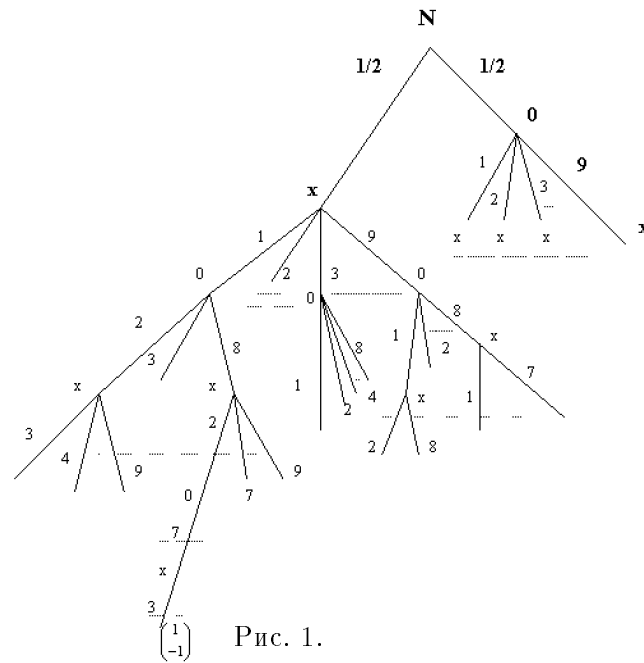
---

<sup>3</sup>Incomplete information.

<sup>4</sup>Complete information.

<sup>5</sup>Джон Харшаньи (J. Harsanyi) — лауреат Нобелевской премии по экономике 1994 г.

Будем обозначать игроков соответственно —  $X$  и  $0$ . Тогда дерево этой игры (в нем информационные множества одноточечны) будет иметь вид, изображенный на рис. 1 (цифры у ребер означают номера клеток, в которых ставится соответствующий  $X$  или  $0$ , а в вершине, обозначенной  $N$ , ход делает Природа, равновероятно (например, подбрасывается монетка) выбирая очередность хода. При этом необходимо иметь в виду, что дерево отображает *все возможные* ходы независимо от их разумности.



Мы не изображаем это дерево полностью, поскольку очевидно, как оно строится. Разумеется, как только выстраивается ряд из трех крестиков или ноликов, то игра заканчивается и победивший игрок получает, скажем, от проигравшего 1 рубль (доллар и пр.). В случае ничьей соответствующие выигрыши — это  $(0,0)$ , т.е. никто никому ничего не платит и ничего не получает.

Формально позиционная форма игры описывается с помощью следующих элементов: списка игроков; дерева игры; указания для каждой вершины номера игрока (или Природы — игрок номер 0), который должен ходить в этой вершине; списка ходов, доступных игроку в каждой вершине и соответствия между ходами и непосредственно следующими вершинами; информационных множеств; указания выигрышей в каждой терминальной (окончательной) вершине; вероятностного распределения на множестве ходов в каждой вершине, в которой ход делает Природа.

Таким образом, мы считаем<sup>6</sup>, что заданы следующие элементы:

1.  $I = \{1, \dots, n\}$  — конечное множество игроков.
2. Мы имеем дерево игры с конечным множеством вершин  $X$  и конечным множеством ходов  $A$ .

При этом должно быть определено отображение  $p : X \rightarrow X \cup \{\emptyset\}$ , которое каждой вершине  $x$  ставит в соответствие единственную непосредственно предшествующую вершину  $p(x)$ , за исключением начальной вершины  $x_0$ , для которой  $p(x_0) = \emptyset$ . Далее, непосредственно следующие за  $x$  вершины тривиально определяются по  $p$ :  $s(x) = p^{-1}(x)$ . Чтобы у нас действительно была древесная структура, необходимо, чтобы множество всех предшествующих и множество всех последующих вершин не пересекались для каждой вершины  $x$  (они могут быть найдены с помощью итераций  $p$  и  $s$ ). Множество терминальных (окончательных) вершин  $T = \{x : s(x) = \emptyset\}$ .

3. Далее мы должны иметь отображение  $\alpha : X \setminus \{x_0\} \rightarrow A$ , ставящее в соответствие каждой вершине  $x$ , кроме начальной, ход, который из непосредственно предшествующей вершины  $p(x)$  приводит к  $x$  и такой, что если  $x', x'' \in s(x)$  и  $x' \neq x''$ , то  $\alpha(x') \neq \alpha(x'')$ .

---

<sup>6</sup>Мы придерживаемся здесь обозначений, использованных в учебнике Mas-Colell, Whinston, Green.

Множество возможных ходов, доступных в вершине  $x$ , есть  $c(x) = \{a \in A : a = \alpha(x') \text{ для некоторого } x' \in s(x)\}$ .

4. Набор информационных множеств  $\mathcal{H}$  и отображение  $H : X \setminus T \rightarrow \mathcal{H}$ , ставящее в соответствие каждой вершине (кроме терминальной) информационное множество  $H(x) \in \mathcal{H}$ . Информационные множества образуют разбиение множества  $X \setminus T$ . Необходимое требование: все вершины, лежащие в одном информационном множестве имеют одни и те же допустимые ходы, т.е. формально  $c(x) = c(x')$ , если  $H(x) = H(x')$ . Мы можем, таким образом, определить выбор, который доступен игроку в информационном множестве  $H$ :

$$c(H) = \{a \in A : a \in c(x) \text{ для } x \in H\}.$$

5. Отображение  $\mu : \mathcal{H} \rightarrow I \cup \{0\}$ , ставящее в соответствие каждому информационному множеству  $H \in \mathcal{H}$  игрока (или Природу, т.е. игрока  $i = 0$ ), который должен ходить в вершине из этого множества. Будем обозначать через  $\mathcal{H}_i = \{H \in \mathcal{H} : \mu(H) = i\}$  те информационные множества, в которых очередь хода принадлежит игроку  $i$ .

6. Функция  $\rho : \mathcal{H}_0 \times A \rightarrow [0, 1]$ , ставящая в соответствие ходам в информационных множествах Природы вероятности, удовлетворяющие условию

$$\rho(H, a) = 0 \text{ для } a \notin C(H)$$

и

$$\sum_{a \in C(H)} \rho(H, a) = 1 \quad \forall \quad H \in \mathcal{H}_0.$$

7. Набор функций выигрышей  $u = \{u_1(\cdot), \dots, u_n(\cdot)\}$ ,  $u_i(\cdot) : T \rightarrow \mathbb{R}$ .

Здесь следует заметить, что, формально говоря, мы определили все для конечных множеств, но данные определения могут быть перенесены и на случай бесконечных множеств (вершин, ходов, игроков). Нарисовать дерево уже было бы, разумеется, невозможно (хотя, впрочем, как мы видим, даже

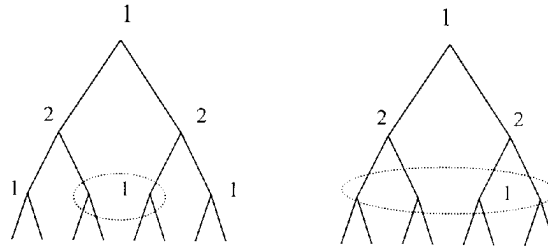


Рис. 2.

для простейшего варианта «крестиков-ноликов» это не очень просто), но все формальности можно было бы соблюсти, приписывая, скажем, выигрыши не терминальным вершинам, а путям, соответствующим разыгрыванию игры.

Важно также отметить, что мы ограничиваемся рассмотрением *игр с полной памятью*, в которых игроки не забывают то, что они раньше знали, включая свои собственные ходы, сделанные ранее. Игры, изображенные на рис. 2, таковыми не являются.

**Определение 2.1.1.** *Игра в позиционной форме называется игрой с совершенной информацией, если каждое информационное множество состоит из единственной вершины. В противном случае игра называется игрой с несовершенной информацией.*

Здесь мы должны остановиться на центральном для бескоалиционной теории игр понятии стратегии. *Стратегия* — это полный возможный план, который описывает то, как игрок будет действовать в каждом возможных обстоятельствах, когда ему, может быть, придется делать ход.

С точки зрения игрока, множества возможных обстоятельств представлены набором его информационных множеств, причем каждое информационное множество представляет различные *различные* обстоятельства, в которых ему может потребоваться ходить. Тем самым стратегия

игрока сводится к описанию того, как он планирует ходить в *каждом* из его информационных множеств.

**Определение 2.1.2.** Пусть  $\mathcal{H}_i$  — семейство всех информационных множеств игрока  $i$ ,  $\mathcal{A}$  — множество всех возможных ходов (действий) в игре,  $C(H) \subset \mathcal{A}$  — множество ходов, возможных в информационном множестве  $H$ . Стратегия игрока  $i$  — это отображение  $s_i : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{A}$  такое, что  $s_i(H) \in C(H)$  для **каждого**  $H \in \mathcal{H}_i$ .

То, что стратегия — это *полный* возможный план, нельзя недооценивать, особенно, как мы увидим, это будет важно в дальнейшем. Определение игроком своей стратегии подобно написанию перед игрой инструкции относительно того, как его представитель может действовать, просто заглядывая в эту инструкцию. Или, иначе, определение игроком  $i$  своей стратегии можно трактовать следующим образом: в каждом информационном множестве игрока  $i$  находится его агент, которому он сообщает, какой ход должен будет сделать этот агент, если ему придется делать ход, т.е. игра «дойдет» до соответствующего информационного множества.

Здесь очень важно иметь в виду следующее. Как *полный* план стратегия часто определяет действия игрока в информационных множествах, которые могут быть даже не достигнуты во время действительного разыгрывания игры. Так, в крестиках-ноликах стратегия игрока  $O$  описывает, в частности, то, что он будет делать, если на 1-м ходу  $X$  сыграет в центр. Но в действительной игре можно сыграть вовсе не в центр. Более того, стратегия игрока может включать планы действий, которые его *собственная* стратегия делает неуместными. Опять же в «крестиках-ноликах» стратегия игрока  $X$  включает описание того, что он будет делать после того, что он сыграет на первом ходу в «центр», а  $O$  ответит в «левый нижний угол», даже если  $X$  на первом ходу играет «верхний левый». Это, возможно, кажется странным, но играет очень важную роль в динамическом случае. Итак, еще раз:

*Стратегия* — это *полный* возможный план действий, который говорит, что игрок будет делать в *каждом его информационном множестве*.

Рассмотрим следующую простую игру (рис. 3).

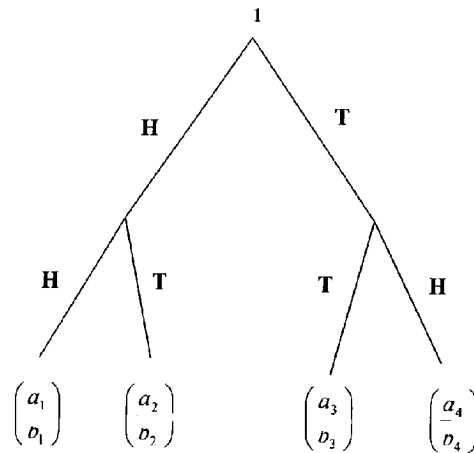


Рис. 3.

У первого игрока две стратегии:  $H$  и  $T$ . А у игрока 2 их *четыре*; поскольку у него 2 информационных множества, следовательно, каждая стратегия должна определять ход в каждом из этих информационных множеств. А именно:

- $s_1$ :  $H$ , если 1-й сыграл  $H$ ;  $H$ , если 1-й сыграл  $T$ ;
- $s_2$ :  $H$ , если 1-й сыграл  $H$ ;  $T$ , если 1-й сыграл  $T$ ;
- $s_3$ :  $T$ , если 1-й сыграл  $H$ ;  $H$ , если 1-й сыграл  $T$ ;
- $s_4$ :  $T$ , если 1-й сыграл  $H$ ;  $T$ , если 1-й сыграл  $T$ .

Отметим здесь еще одно чрезвычайно важное обстоятельство. Имея набор стратегий каждого игрока, мы можем построить нормальную форму данной игры: поскольку выбор игроками своих стратегий определяет ход в *каждом* информационном множестве, значит, полностью определяет траекторию или «путь», по которому будет развиваться игра. Нормальная форма игры, изображенной на рис. 3, есть

$$\begin{array}{c}
 H \\
 T
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 \begin{matrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{matrix} \\
 \begin{matrix} (a_1, b_1) & (a_1, b_1) & (a_2, b_2) & (a_2, b_2) \\
 (a_3, b_3) & (a_4, b_4) & (a_3, b_3) & (a_4, b_4) \end{matrix}
 \end{pmatrix}$$

Каждый набор стратегий определяет траекторию «движения» по дереву и тем самым определяет исход игры. Ясно также, что мы имеем возможность говорить о равновесии по Нэшу.

Прежде чем обратиться к более подробному рассмотрению равновесия по Нэшу приведем теорему существования.

**Теорема 2.1.1.** (Kuhn, 1953)<sup>7</sup>. *В конечной игре с совершенной информацией существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.*

Мы начнем со следующего примера, который покажет, что равновесие по Нэшу не всегда дает разумное предсказание.

**Пример** (Mas-Colell, Whinston, Green). Фирма  $E$  (entrant) — новичок — рассматривает вопрос о том, входить ли на рынок, где в текущий момент есть одна единственная укоренившаяся фирма  $I$  (incumbent). Если  $E$  решается на вход, то  $I$  может ответить двумя способами: она может предоставить вход, отдавая часть своих продаж, но не изменяя цену, либо она может вступить в хищническую войну, которая приведет к «драматическому» снижению цен. Дерево, соответствующее рассматриваемой ситуации, изображено на рис. 4.

Нормальная форма этой игры имеет следующий вид (рис. 5):

---

<sup>7</sup>Русский перевод статьи Куна см.: Позиционные игры. [Сб.] / Под ред. Н. Н. Воробьева и И. Н. Врублевской. М.: Наука – Физматгиз, 1967.

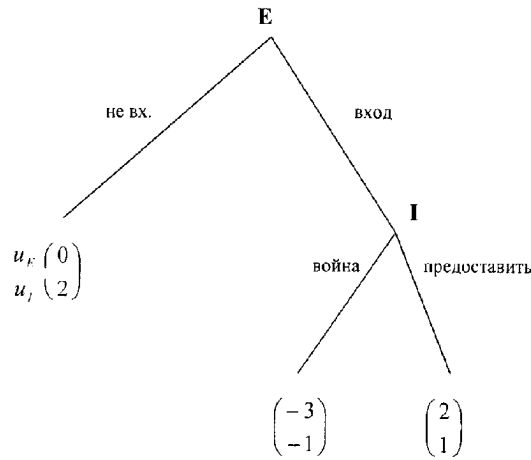


Рис. 4.

|   |      | I                                      |                                      |
|---|------|----------------------------------------|--------------------------------------|
|   |      | Война<br>(если «вход»)                 | Предоставить<br>(если «вход»)        |
| E | нет  | $\begin{pmatrix} 0, 2 \end{pmatrix}$   | $\begin{pmatrix} 0, 2 \end{pmatrix}$ |
|   | вход | $\begin{pmatrix} -3, -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2, 1 \end{pmatrix}$ |

Рис. 5.

Здесь две ситуации равновесия по Нэшу в чистых стратегиях: (нет, война) и (да, предоставить). Но первая из этих ситуаций — это не разумное предсказание: фирма  $E$  может предвидеть, что если она изберет «вход», то  $I$  в действительности изберет «предоставить», т.е. «война, если вход» — не заслуживает доверия.

Для того чтобы исключить ситуации типа (нет; война, если вход), мы рассмотрим «принцип последовательной рациональности»: стратегия игры должна предписывать оптимальный ход в каждой вершине дерева. Т.е. если игрок находится в некоторой вершине дерева, его стратегия должна предписывать

оптимальный выбор, начиная с этой точки, при данных стратегиях его оппонентов. В этом смысле стратегия «война, если вход» таковой не является, ибо после входа единственная оптимальная стратегия для  $I$  — «предоставить». В нашем примере сделать все очень просто: начнем с того, что определим оптимальное поведение для  $I$  в игре на этапе «после входа» — это, очевидно, «предоставить». Теперь мы можем определить оптимальное поведение фирмы  $E$  до этого момента, с учетом предвидения того, что произойдет после входа. Это можно сделать, рассмотрев «редуцированную» позиционную форму, где «пост-входное» принятие решения  $I$  заменено на соответствующие выигрыши, которые возникают при оптимальном «пост-входном» поведении фирмы  $I$  (рис. 6). А это уже простейшая задача принятия индивидуального решения, причем решение — «вход».

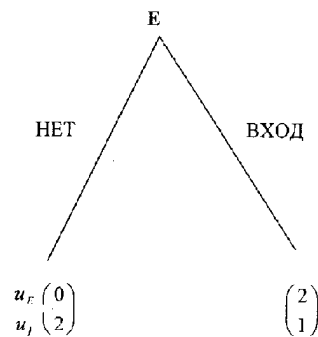


Рис. 6.

Этот тип процедуры, которая начинается с нахождения оптимального поведения «в конце игры», а затем определения оптимального поведения на более ранних шагах в предвидении того, что будет происходить дальше, называется обратной индукцией<sup>8</sup>. (Подчеркнем, что сказанное относится к конечным играм с совершенной информацией, т. е. конечным играм

---

<sup>8</sup>Backward induction.

с «одновершинными» информационными множествами.)

Однако, прежде чем остановиться на обратной индукции более подробно, мы должны отметить следующее достаточно существенное обстоятельство, касающееся смешанных стратегий. А именно, если мы рассматриваем игры в позиционной форме, то игроки могут рандомизировать свои чистые стратегии способом, отличным от стандартного, в котором используются смешанные стратегии, приписывающие каждой чистой стратегии игрока (множество которых может быть очень большим) вероятность того, что игрок будет ее играть. В позиционной форме появляется возможность рандомизации отдельно в каждом информационном множестве. Такой способ рандомизации приводит к *стратегиям поведения*.

**Определение 2.1.3.** В игре в позиционной форме  $\Gamma_E$  стратегия поведения игрока  $i$  определяет для каждого информационного множества  $H \in \mathcal{H}_i$  и альтернативы  $a \in C(H)$  вероятность  $\lambda_i(a, H) \geq 0$ , причем  $\sum_{a \in C(H)} \lambda_i(a, H) = 1$  для всех  $H \in \mathcal{H}_i$ .

Оказывается (Kuhn, 1953; см. также, например, Петросян, Зенкевич, Семина, 1998), что для игр с полной памятью эти два типа рандомизации эквивалентны. (Важно подчеркнуть, что полная память играет здесь ключевую роль.) А именно, для любой стратегии поведения игрока  $i$  существует его смешанная стратегия, дающая в точности такое же распределение выигрышей для любых стратегий (смешанных или стратегий поведения), которые могут играть остальные игроки, и наоборот.

Это соответствие можно установить следующим образом. Будем, как всегда, обозначать чистые стратегии игрока  $i$  через  $s_i$ . Пусть  $\sigma_i$  — некоторая его смешанная стратегия. Будем называть некоторую вершину  $x$  дерева  $\Gamma_E$  возможной для  $s_i$ , если существует такой набор стратегий  $s = (s_i, s_{-i})$ , что траектория, определяемая этим набором, проходит через

$s$ . Обозначим множество всех возможных для  $s_i$  вершин через  $P(s_i)$ .

Информационное множество  $H$  называется существенным для  $s_i$ , если оно содержит некоторую возможную для  $s_i$  вершину. Множество существенных для  $s_i$  информационных множеств обозначим через  $R(s_i)$ .

Пусть  $\sigma_i$  — некоторая смешанная стратегия игрока  $i$ . Тогда стратегия поведения  $\lambda_i$ , соответствующая смешанной стратегии  $\sigma_i$ , определяется следующим образом. Если  $H \in R(s_i)$ , то

$$\lambda_i(a, H) = \frac{\sum_{\{s_i: H \in R(s_i), s_i(H)=a\}} \sigma_i(s_i)}{\sum_{\{s_i: H \in R(s_i)\}} \sigma_i(s_i)}. \quad (*)$$

Если  $H \notin R(s_i)$ , то знаменатель этой дроби обращается в ноль, поэтому стратегию  $\lambda_i$  можно определить произвольно, например,

$$\lambda_i(a, H) = \sum_{\{s_i: s_i(H)=a\}} \sigma_i(s_i).$$

Если  $\lambda_i$  — стратегия поведения, то  $\sigma_i$  можно определить как

$$\sigma_i(s_i) = \prod_H \lambda_i(s_i(H), H).$$

При этом  $\lambda_i$  оказывается стратегией поведения, соответствующей  $\sigma_i$ . Поэтому в играх с полной памятью (а именно такие игры мы и рассматриваем) безразлично, каким способом рандомизировать. Терминологически мы всегда будем говорить о смешанных стратегиях.

В игре с неполной памятью могут существовать смешанные стратегии, для которых нет эквивалентных им стратегий поведения.

**П р и м е р** (Osborn, Rubinstein). Рассмотрим игру, изображенную на рис. 7.

Пусть смешанная стратегия игрока  $\sigma$  определяется следующим образом: с вероятностью  $1/2$  играет  $L$ , а потом еще

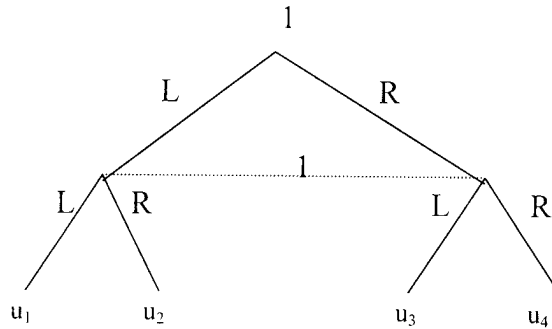


Рис. 7.

раз  $L$ , и с вероятностью  $1/2$  играется  $R$ , а потом еще раз  $R$ . Исходом, соответствующим этой стратегии, является распределение  $(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$  на множестве терминальных вершин. Но такой исход не может быть обеспечен ни одной стратегией поведения: стратегия поведения  $((p, 1-p), (q, 1-q))$  инициирует распределение на множестве терминальных вершин, в которых исход, соответствующий  $u_2$ , имеет вероятность 0 в случае только, если  $p = 0$  или  $q = 1$ , но тогда вероятность  $(L, L)$  или  $(R, R)$  есть 0.

## 2.2. Обратная индукция и конечные игры с совершенной информацией

Для того чтобы внимательнее посмотреть на обратную индукцию в конечной игре с совершенной информацией, начнем с определения оптимального «действия» в последних вершинах дерева, где принимается решение (т.е. тех вершинах, для которых последователи — это только терминальные вершины). Решение, принимаемое игроком в такой вершине, не зависит уже от стратегического взаимодействия и потому является простой задачей принятия решения. Затем мы можем обратиться к «предпоследней» вершине и найти оптимальное решение там, предвидя, естественно, ход, который будет сделан

в последней вершине. И так далее.

Рассмотрим пример (рис. 8).

Обратная индукция дает нам ситуацию  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ :

$$\sigma_1 = R, \quad \sigma_2 = (a, \text{ если } 1 \text{ играет } R),$$

$$\sigma_3 = \begin{cases} r, & \text{если } 1 \text{ играет } L, \\ r, & \text{если } 1 \text{ играет } R \text{ и } 2 \text{ играет } a, \\ l, & \text{если } 1 \text{ играет } R \text{ и } 2 \text{ играет } b. \end{cases}$$

Обратим внимание на то, что это есть равновесие по Нэшу. Но есть и еще равновесия по Нэшу в чистых стратегиях, в которых стратегии третьего игрока — это

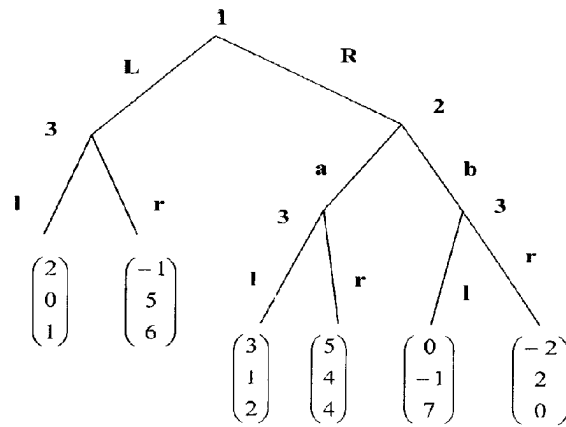
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} l \\ r \\ l \end{pmatrix}$$

или

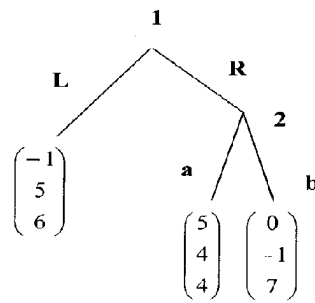
$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} l \\ r \\ r \end{pmatrix}.$$

Однако можно проверить, что последние два р.Н. не удовлетворяют принципу последовательной рациональности. Общая теорема здесь выглядит следующим образом:

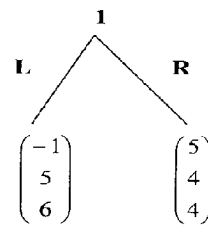
**Предложение 2.2.1.** *В любой конечной игре с совершенной информацией  $\Gamma_E$  существует ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях, которая может быть найдена с помощью обратной индукции. Более того, если ни один из игроков не имеет одинаковых выигрышей ни в одной из терминальных вершин, то существует единственное р.Н., которое может быть получено таким образом.*



Исходная игра



Первая редуцированная игра



Вторая редуцированная игра

Рис. 8.

### 2.3. Совершенное под-игровое равновесие по Нэшу

Рассмотрим ситуацию, которая у нас уже была с входом в рынок. Но теперь модифицируем ее слегка, считая (см. Mas-Colell, Whinston, Green), что теперь после входа *обе* фирмы могут выбирать, воевать или нет (принять) (рис. 9).

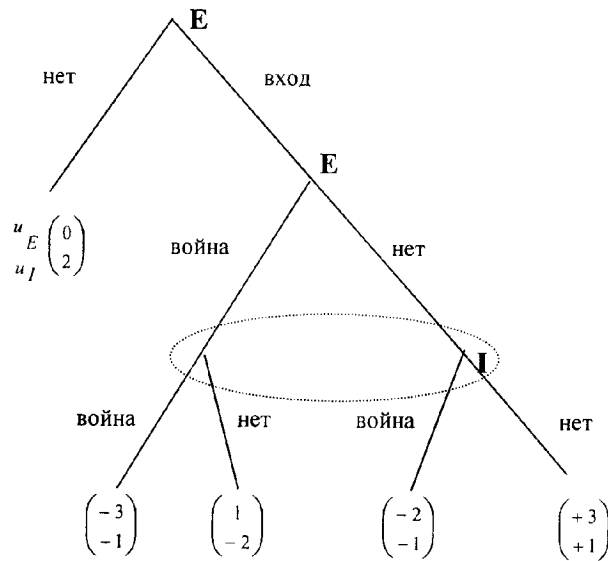


Рис. 9.

Нормальная форма игры с одновременными ходами (после входа  $E$ ) есть (рис. 10):

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} E \\ \text{война} \\ \text{нет} \end{array}
 \begin{array}{c} \text{Война} \quad \text{Нет} \\ \left( \begin{array}{cc} (-3, -1) & (1, -2) \\ (-2, -1) & (3, 1) \end{array} \right) \end{array}
 \end{array}$$

Рис. 10.

В ней равновесие по Нэшу — это (НЕТ, НЕТ).

Нетрудно проверить, что в исходной игре есть 3 равновесия по Нэшу в чистых стратегиях  $(\sigma_E, \sigma_I)$ :

- ((нет; принять если вход), (война, если  $E$  входит));
- ((нет; война, если вход), (война, если  $E$  входит));
- ((вход; принять если вход), (принять, если  $E$  входит)).

Первые две стратегии для  $E$  не кажутся очень разумными, но стратегии — это, по определению, полный план.

Заметим, что (принять, принять) — единственное р.Н. в игре с одновременными ходами. Поэтому естественно ожидать, что обе фирмы сыграют «принять», следуя за входом  $E$ . Но если это так, то фирма  $E$  должна входить. Поэтому логика последовательной рациональности говорит, что только последнее равновесие должно быть разумным предсказанием.

Итак, перейдем к формальным определениям.

**Определение 2.3.1.** *Под-игрой<sup>9</sup> игры  $\Gamma_E$  в позиционной форме называется такое поддереве дерева исходной игры, что:*

- (1) *его начальная вершина — одноточечное информационное множество и оно содержит все последующие (непосредственно и далее) за ней вершины и только их;*
- (2) *если вершина  $x$  лежит в под-игре, то все вершины  $x' \in H(x)$  тоже лежат в этой под-игре, где  $H(x)$  — информационное множество, содержащее  $x$ .*

На рис. 11 две под-игры — сама игра и игра с одновременными ходами. Обведенная пунктиром часть дерева не является под-игрой.

Заметим, что в игре с совершенной информацией каждая вершина (кроме терминальной) инициирует под-игру.

Легко видеть, что в соответствии с определением стратегий в позиционной игре любая стратегия игрока в позиционной игре индуцирует его стратегию в под-игре. Эта стратегия

---

<sup>9</sup>Subgame.

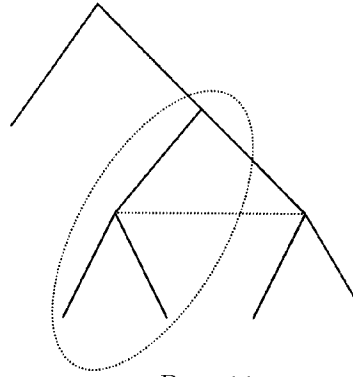


Рис. 11.

является сужением исходной стратегии на информационные множества игрока, оказывающиеся в под-игре.

**Определение 2.3.2.** Ситуация (набор стратегий)  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  в игре в позиционной форме  $\Gamma_E$  называется совершенным (под-игровым) равновесием по Нэшу, если она индуцирует равновесие по Нэшу в каждой под-игре.

Нетрудно заметить, что в приведенном примере первые два набора стратегий не являются СПРН, так как не индуцируют р.Н. в пост-входной игре.

Далее мы для краткости будем писать СПРН вместо «совершенное под-игровое равновесие по Нэшу»<sup>10</sup>. Ясно, что СПРН является р.Н., но не каждое р.Н. является СПРН<sup>11</sup>.

В конечных играх с совершенной информацией множество СПРН совпадает с множеством р.Н., которые могут быть получены с помощью обратной индукции.

**Предложение 2.3.1.** В любой конечной игре с совершенной информацией  $\Gamma_E$  существует СПРН в чистых стратегиях.

<sup>10</sup>Subgame perfect Nash equilibrium.

<sup>11</sup>Заметим, что СПРН называется иногда также абсолютным равновесием (см., например, Петросян, Зенкевич, Семина, 1998).

*Если все выигрыши всех игроков различны в любых двух терминальных вершинах, то оно единственно.*

Для определения множества СПРН в общей (конечной) динамической игре  $\Gamma_E$  процедура обратной индукции может быть обобщена следующим образом:

1. Начинаем с конца дерева игры и определяем равновесия по Нэшу для каждой из «концевых» под-игр, т.е. под-игр, не имеющих собственных под-игр.
2. Выбираем одно из равновесий по Нэшу в каждой из этих «концевых» под-игр и рассматриваем редуцированную игру, в которой эти «концевые» под-игры заменяются выигрышами, получающимися в этих под-играх, когда игроки используют эти равновесные стратегии.
3. Повторяем шаги 1 и 2 для редуцированных игр. Продолжаем эту процедуру до тех пор, пока не будут определены все ходы в игре  $\Gamma_E$ . Набор ходов в каждом из информационных множеств игры  $\Gamma_E$  образует СПРН.
4. Если ни на одном из шагов процесса не возникала множественность равновесий по Нэшу, то полученное СПРН единственно. Если же множественность равновесий имела место, то множество всех СПРН получается с помощью повторения этой процедуры для каждого возможного равновесия, возникающего в рассматриваемых под-играх.

**Предложение 2.3.2.** *Рассмотрим игру в позиционной форме  $\Gamma_E$  и некоторую ее под-игру  $S$ . Предположим, что набор  $\sigma^S$  стратегий является СПРН в под-игре  $S$  и пусть  $\hat{\Gamma}_E$  — редуцированная игра, образованная заменой  $S$  терминальной вершиной с выигрышами, равными выигрышам, возникающим при игре  $\sigma^S$ . Тогда*

- (1) в любом СПРН  $\sigma$  игры  $\Gamma_E$ , в которой  $\sigma^S$  — это набор стратегий, которые играют в под-игре  $S$ , ходы игроков в информационных множествах вне  $S$  должны образовывать СПРН игры  $\hat{\Gamma}_E$ ;
- (2) если  $\hat{\sigma}$  — СПРН в  $\hat{\Gamma}_E$ , то набор  $\sigma$ , приписывающий ходы в соответствии с  $\sigma^S$  в информационных множествах из  $S$  и ходы в соответствии с  $\hat{\sigma}$  в информационных множествах вне  $S$ , является СПРН в  $\Gamma_E$ .

Доказательства этих предложений можно найти, например, в учебнике Mas-Colell, Whinston, Green.

Рассмотрим модификацию нашего примера. Предположим, что есть две части рынка, две ниши — малая ниша (м.н.) и большая ниша (б.н.) (см. рис. 12).

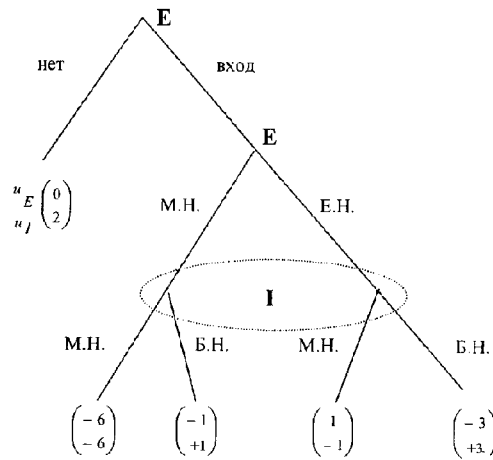


Рис. 12.

Чтобы найти СПРН, рассмотрим вначале «пост-входную» под-игру. Здесь два равновесия по Нэшу в чистых стратегиях (б.н., м.н.) и (м.н., б.н.).

В любом СПРН в этой под-игре должно индуцироваться одно из этих равновесий по Нэшу. Предположим сначала, что фирмы играют (б.н., м.н.), а следовательно, редуцированная

игра будет иметь вид, изображенный на рис. 13. В этом случае  $E$  выбирает входить, следовательно, СПРН — это  $(\sigma_E, \sigma_I) = ((\text{вход, б.н.}), (\text{м.н., если } E \text{ вошла}))$ .

Во втором случае редуцированная игра представлена на рис. 14:

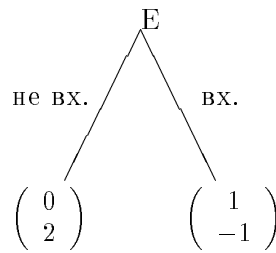


Рис. 13.

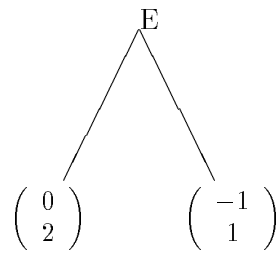


Рис. 14.

Следовательно, СПРН  $(\sigma_E, \sigma_I) = ((\text{не вх., м.н.}), (\text{б.н., если } E \text{ вошла}))$ .

Разумеется, как всегда, не все так просто и с СПРН. Рассмотрим следующую игру (Rabin, 1988) (рис. 15).

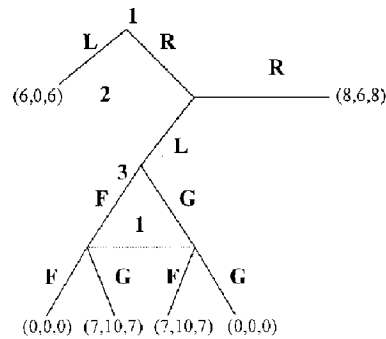


Рис. 15.

В «координационной игре» с одновременными ходами между 1 и 3 игроками три равновесия по Нэшу: два в чистых стратегиях, приводящих к выигрышам  $(7, 10, 7)$ , и равновесие в сме-

шанных стратегиях, дающее выигрыши  $(3.5, 5, 3.5)$ . Если мы выбираем равновесие, в котором игроки 1 и 3 успешно координируются, то игрок 2 играет  $L$ , а игрок 1 —  $R$ , ожидая выигрыш 7. Если же мы выбираем неэффективное равновесие в смешанных стратегиях, то игрок 2 сыграет  $R$ , а 1 — снова  $L$ , ожидая выигрыш 8. Поэтому во всех СПРН игрок 1 играет  $R$ .

Но, ... тем не менее игроку 1 будет осмысленно сыграть  $L$ , если он не увидел возможности координации на 3-м шаге, а поэтому ожидает выигрыш  $3\frac{1}{2}$ , но опасается того, что игрок 2 может верить, что при игре на 3-м шаге будет достигнуто эффективное равновесие.

Суть здесь в том, что «под-игровое совершенство» предполагает не только, что игроки ожидают р.Н. во всех под-играх, но также и что все игроки ожидают *одно и то же* равновесие.

## 2.4. Примеры

### 1. Дуополия по Штакельбергу.

Эта ситуация — модификация дуополии по Курно, рассмотренной нами в гл. 1. Теперь мы считаем, что есть лидер, который делает ход первым. Затем, зная этот выбор, другой игрок делает свой ход.

Итак, игра протекает следующим образом:

- 1) фирма 1 выбирает  $q_1 \geq 0$ ;
- 2) фирме 2 становится известно это  $q_1$ , и после этого она выбирает  $q_2 \geq 0$ ;
- 3) выигрыш фирмы  $i$  есть

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i(P(Q) - c),$$

где  $P(Q) = a - Q$ ;  $Q = q_1 + q_2$ ;  $c$  — постоянные предельные затраты.

Для нахождения равновесия здесь мы воспользуемся обратной индукцией. Вычислим вначале функцию реагирования

фирмы 2, решая задачу

$$\max_{q_2 \geq 0} \pi_2(q_1, q_2) = \max_{q_2 \geq 0} q_2[a - q_1 - q_2 - c].$$

Легко видеть, что

$$R_2(q_1) = \frac{a - q_1 - c}{2}.$$

То же самое было и в случае дуополии Курно. Разница, однако, в том, что это *действительная*, а не гипотетическая функция реагирования фирмы 2.

Фирма 1, естественно, также может вычислить эту функцию реагирования, а следовательно, задача фирмы 1 на первом шаге выглядит так:

$$\max_{q_1} \pi_1(q_1, R_2(q_1)) = \max_{q_1} q_1[a - q_1 - R_2(q_1) - c] = \max_{q_1} q_1 \frac{a - q_1 - c}{2},$$

что дает

$$q_1^* = \frac{a - c}{2} \quad \text{и} \quad R_2(q_1^*) = \frac{a - c}{4}.$$

Прибыль в случае дуополии по Штакельбергу:

$$\pi_1 = \frac{a - c}{2} \left[ \frac{1}{4}(a - c) \right] = \frac{(a - c)^2}{8}; \quad \pi_2 = \frac{(a - c)^2}{16}.$$

Заметим, что прибыль в случае дуополии по Курно:  $\frac{1}{9}(a - c)^2$ .

Этот пример показывает существенное различие между принятием единоличного решения и решения при нескольких участниках. Здесь «лишняя» информация для игрока и знание того, что другие имеют больше информации, могут ухудшить положение игрока.

## 2. Последовательный торг (Rubinstein, 1982).

Рассмотрим следующую игру. Игроки 1 и 2 торгуются о разделе 1 доллара: 1-й предлагает некоторый способ деления, 2-й либо принимает это предложение, либо нет; если нет, то он

предлагает способ деления, а 1-й принимает, либо нет, и т./д. Каждое предложение занимает один период, но при этом есть дисконтирующий множитель. Итак, формально рассмотрим следующую трехпериодную игру.

- (1a) В начале 1-го периода игрок 1 предлагает «свою долю»  $s_1$  доллара, оставляя  $1 - s_1$  игроку 2.
- (1b) Игрок 2 принимает предложение, тогда игра заканчивается, либо отклоняет его. В этом случае игра переходит ко 2-му периоду.
- (2a) В начале 2-го периода игрок 2 предлагает долю  $s_2$ , которую получает игрок 1, оставляя себе  $1 - s_2$ .
- (2b) Игрок 1 либо принимает предложение, либо нет. В последнем случае игра переходит к 3-му периоду.
- (3) Игроки в 3-м периоде получают доли  $(s, 1 - s)$ ,  $0 < s < 1$ , причем  $s$  задана экзогенно.

Мы будем решать задачу с помощью обратной индукции. Вначале вычисляем, что происходит, если дело доходит до 2-го периода. Игрок 1 может получить  $s$ , если отклонит  $s_2$ , но стоимость при этом будет  $\delta s$  (в сравнении с предыдущим (вторым) периодом). Следовательно, игрок 1 примет  $s_2$  тогда и только тогда, когда  $s_2 \geq \delta s$  (считаем, что принимает, если равенство). Значит, задача игрока 2 состоит в выборе между получением  $1 - \delta s$  (предлагая первому игроку  $s_2 = \delta s$ ) и получением  $1 - s$  в следующем периоде (предлагая  $s_2 < \delta s$ ). Дисконтированная стоимость последнего «действия» есть  $\delta(1 - s)$ , что меньше, чем  $1 - \delta s$ , а потому 2-й игрок во 2-м периоде предлагает  $s_2^* = \delta s$ .

Таким образом, если игра доходит до 2-го периода, то 2-й игрок предложит  $s_2^*$ , и 1-й игрок примет это предложение.

Однако 1-й игрок может предвидеть, что игрок 2 может получить  $1 - s_2^*$  во втором периоде, отклоняя предложение  $s_1$ , но «стоять» это будет только  $\delta(1 - s_2^*)$  в следующем периоде.

Значит 2-й игрок принимает  $1 - s_1$  тогда и только тогда, когда  $1 - s_1 \geq \delta(1 - s_2^*)$ , или  $s_1 \leq 1 - \delta(1 - s_2^*)$ .

Поэтому задача 1-го игрока в периоде 1 состоит в выборе между получением  $1 - \delta(1 - s_2^*)$  в этом периоде (предлагая  $1 - s_1 = \delta(1 - s_2^*)$  игроку 2) и получением  $s_2^*$  в следующем периоде (предлагая  $1 - s_1 < \delta(1 - s_2^*)$  игроку 2). Дисконтированная стоимость последнего есть  $\delta s_2^* = \delta^2 s$ , что меньше, чем  $1 - \delta(1 - s_2^*) = 1 - \delta(1 - \delta s)$ . Значит, оптимальное предложение в первом периоде есть  $s_1^* = 1 - \delta(1 - s_2^*) = 1 - \delta(1 - \delta s)$ . Следовательно, на первом ходу 1-й игрок предлагает  $s_1^*$ , 2-й принимает это предложение и получает  $1 - s_1^*$ . Таким образом, выигрыши игроков есть  $1 - \delta + \delta^2 s$  и  $\delta - \delta^2 s$  соответственно.

**З а д а ч а.** Докажите, что если бы игра продолжалась бесконечно (здесь уже нет экзогенно заданного  $s$ ), то игрок 1 на 1-м шаге предложил бы  $s^* = 1/(1 + \delta)$ , оставляя второму  $1 - s^* = \delta/(1 + \delta)$ , и второй игрок принял бы это предложение.

### 3. «Инвесторы и банк» (Diamond, Dybvig, 1983).

Представим себе следующую ситуацию. Два инвестора вкладывают по  $D$  долларов в банк. Банк инвестировал эти депозиты в долгосрочный проект. Если «форс-мажорные» обстоятельства заставляют банк ликвидировать свои инвестиции до того, как проект «созревает», то он может покрыть сумму  $2r$ , где  $D > r > D/2$ . Если банк позволяет проекту «созреть», то проект принесет  $2R$ , где  $R > D$ .

Есть 2 даты, когда вкладчики могут забрать свой вклад: дата 1 — до «созревания», дата 2 — после. Для простоты считаем, что нет дисконтирования. Если оба вкладчика забирают вклады в момент 1, то оба получают по  $r$  и игра заканчивается. Если только один вкладчик забирает в момент 1, то он получает  $D$ , а второй —  $2r - D$ . Наконец, если ни один вкладчик не заберет в момент 1, то проект созревает и оба вкладчика забирают в момент 2, при этом каждый получает по  $R$ . Если только один вкладчик забирает в момент 2, то он получает  $2R - D$ , другой получает  $D$ . Если, наконец, ни один

не забирает в момент 2, то банк возвращает по  $R$  каждому.

Неформально для момента 1 игру можно попытаться изобразить следующим образом (см. рис. 16):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{забирать} & \text{нет} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{забирать} \\ \text{нет} \end{array} & \left( \begin{array}{cc} r, r & D, 2r - D \\ 2r - D, D & (\text{шаг 2}) \end{array} \right) \end{array}$$

Рис. 16.

Для момента 2 игра изображена на рис. 17:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{забирать} & \text{нет} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{забирать} \\ \text{нет} \end{array} & \left( \begin{array}{cc} R, R & 2R - D, D \\ D, 2R - D & R, R \end{array} \right) \end{array}$$

Рис. 17.

Дерево этой игры изображено на рис. 18.

Начнем с момента 2: так как  $R > D$  (и  $2R - D > R$ ), то «забирать» строго доминирует «нет». Значит, единственное р.Н. — это (забрать, забрать), давая выигрыши  $(R, R)$ . Поскольку нет дисконта, то можно просто подставить в «первую игру» (см. рис. 19):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{З.} & \text{Н.} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{З.} \\ \text{Н.} \end{array} & \left( \begin{array}{cc} r, r & D, 2r - D \\ 2r - D, D & R, R \end{array} \right) \end{array}$$

Рис. 19.

Так как  $r < D$ , то  $2r - D < r$ , и мы имеем два р.Н., дающие выигрыши  $(r, r)$  и  $(R, R)$ , а именно:

- 1) оба вкладчика «бегут» в банк в момент 1;

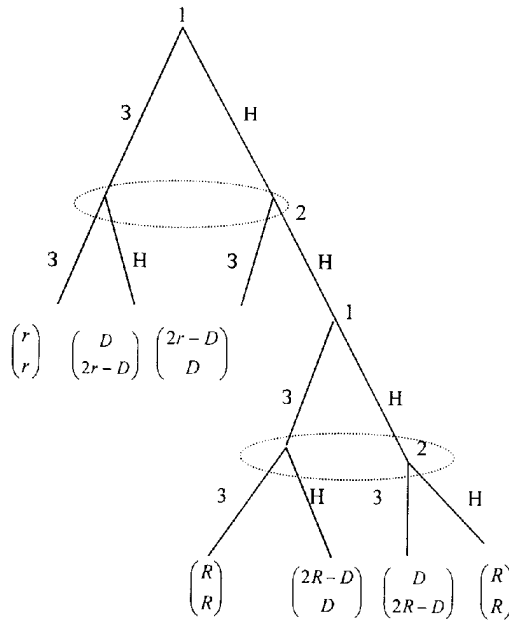


Рис. 18.

2) оба забирают в момент 2.

Первое можно интерпретировать как «бежать в банк»: если вкладчик верит в то, что другой побежит, то ему тоже надо бежать, хотя, конечно, обоим лучше подождать.

## 2.5. Повторяющиеся игры

Рассмотрим следующий вариант «Дилеммы Заключенного» (рис.20). Будем считать, что игра повторяется дважды, причем игроки узнают исход первого розыгрыша до того, как начинается второй. Считаем пока, что нет дисконта и, поэтому выигрыши есть просто сумма выигрышей в первом и втором разыгрывании, т.е. мы имеем дело с двухпериодной или двухшаговой «Дилеммой Заключенного».

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L_2 & R_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} L_1 \\ R_1 \end{array} & \left( \begin{array}{cc} (1,1) & (5,0) \\ (0,5) & (4,4) \end{array} \right) \end{array}$$

Рис. 20.

Следуя той логике СПРН, которая у нас была ранее, посмотрим, что происходит на втором шаге игры. Ясно, что исход игры второго шага будет р.Н., т.е.  $(L_1, L_2)$ . А это значит, что игра на первом шаге сводится к тому, что к каждому элементу исходной матрицы нужно добавить выигрыши второго шага, т.е.  $(1, 1)$ .

Таким образом, матрица становится

$$\left( \begin{array}{cc} (2, 2) & (6, 1) \\ (1, 6) & (5, 5) \end{array} \right)$$

а в ней р.Н. единственно —  $(L_1, L_2)$ , значит СПРН в этой двухшаговой «Дилемме Заключенного» — это  $(L_1, L_2)$  на первом шаге и  $(L_1, L_2)$  — на втором.

Теперь отвлечемся на время от двукратного повторения игры. Пусть  $G = (A_1, \dots, A_n; u_1, \dots, u_n)$  — статическая игра с полной информацией, в которой игроки одновременно выбирают ходы  $a_i$  из своих пространств стратегий  $A_i$  и соответствующие выигрыши есть  $u_i(a_1, \dots, a_n)$ . Будем называть  $G$  «базовой» игрой.

**Определение 2.5.1.** *Конечной повторяющейся игрой  $G(T)$  базовой игры  $G$  называется игра, в которой  $G$  разыгрывается  $T$  раз и перед началом каждого очередного розыгрыша игрокам известны исходы всех предыдущих розыгрышей, т.е. известны стратегии, избранные игроками, и полученные выигрыши. Выигрыши в игре  $G(T)$  определяются как сумма (или дисконтированная сумма) выигрышей на каждом шаге.*

Рассмотренная выше ситуация на самом деле характерна и для общего случая.

**Предложение 2.5.1.** *Если базовая игра  $G$  имеет единственное равновесие по Нэшу, то для любого конечного  $T$  повторяющаяся игра  $G(T)$  имеет единственное СПРН: на каждом шаге играетя р.Н.*

Рассмотрим теперь ситуацию, когда базовая игра  $G$  имеет несколько равновесий (Gibbons):

$$\begin{array}{c} L_1 \\ M_1 \\ R_1 \end{array} \begin{array}{ccc} L_2 & M_2 & R_2 \\ \left( \begin{array}{ccc} (1, 1) & (5, 0) & (0, 0) \\ (0, 5) & (4, 4) & (0, 0) \\ (0, 0) & (0, 0) & (3, 3) \end{array} \right) \end{array}$$

Здесь 2 равновесия по Нэшу в чистых стратегиях  $(L_1, L_2)$  и  $(R_1, R_2)$ .

Предположим, что эта игра повторяется дважды, причем исход первой игры известен до того, как разыгрывается вторая. Для нас важно, что может существовать СПРН, в котором на первом шаге играетя  $(M_1, M_2)$ . Это тот самый нюанс, который важен для нас, поскольку он, так сказать, разделяет дух того, что происходит в случае бесконечного разыгрывания игры  $G$ .

Как и раньше, предполагаем (поскольку речь идет о СПРН), что игроки считают, что исход второго розыгрыша — это р.Н. базовой игры. Вообще говоря, можно предположить, что игроки *могут* ожидать, что различным исходам 1-го этапа будут соответствовать разные исходы 2-го этапа. Предположим, например, что игроки ожидают, что  $(R_1, R_2)$  будет исходом, если первый исход был  $(M_1, M_2)$ , но  $(L_1, L_2)$ , если один из 8 оставшихся был исходом 1-го этапа. В этом случае игра на 1-м шаге сводится к игре,

$$\begin{array}{c} L_1 \\ M_1 \\ R_1 \end{array} \begin{array}{ccc} L_2 & M_2 & R_2 \\ \left( \begin{array}{ccc} (2, 2) & (6, 1) & (1, 1) \\ (1, 6) & (7, 7) & (1, 1) \\ (1, 1) & (1, 1) & (4, 4) \end{array} \right) \end{array}$$

Здесь  $(3, 3)$  добавлено к выигрышам, соответствующим  $(M_1, M_2)$  и  $(1, 1)$  — к 8 остальным элементам исходной матрицы.

В этой игре уже 3 р.Н.:  $(L_1, L_2)$ ,  $(M_1, M_2)$ ,  $(R_1, R_2)$ . Эти три р.Н. соответствуют СПРН в первоначальной повторяющейся игре. Обозначим  $((w, x)(y, z))$ , — исходы в повторяющейся игре  $(w, x)$  — на 1-м шаге,  $(y, z)$  — на 2-м. Равновесие  $(L_1, L_2)$  соответствует «совершенному под-игровому» исходу  $((L_1, L_2), (L_1, L_2))$  в повторяющейся игре. Аналогично р.Н.  $(R_1, R_2)$  соответствует «совершенному под-игровому» исходу  $((R_1, R_2), (L_1, L_2))$  в повторяющейся игре. Эти два исхода просто «наследуют» р.Н. базовой игры. Но третий исход — *качественно другой*:  $(M_1, M_2)$  — соответствует «совершенному под-игровому» (СП) исходу  $((M_1, M_2), (R_1, R_2))$  в повторяющейся игре, т.к. «предвидимый» исход 2-го шага — это  $(R_1, R_2)$  вслед за  $(M_1, M_2)$ .

Иными словами, кооперацию можно достичь на 1-м шаге СП-исхода повторяющейся игры. А это уже дает пример более общей природы: если  $G$  — статическая игра с полной информацией и множественными р.Н., то *может* существовать СП исход в игре  $G(T)$ , в которой на любом шаге  $t < T$  исход шага  $t$  — не является р.Н.

Основной вывод здесь такой: угрозы или обещания, которым можно верить в будущем, *могут* влиять на текущее поведение. Второй вывод, однако, состоит в том, что «под-игровое совершенство» может не воплощать достаточно сильные определения «правдоподобия». Говоря, например, о СП исходе  $((M_1, M_2), (R_1, R_2))$ , мы предполагали, что игроки предвидят, что  $(R_1, R_2)$  будет исходом на втором шаге, если исход первого шага был  $(M_1, M_2)$ , а  $(L_1, L_2)$  — исходом второго шага игры, если любой другой из 8 оставшихся исходов возникает на первом шаге. Однако игра  $(L_1, L_2)$  на втором шаге может показаться достаточно глупой, если  $(R_1, R_2)$  с выигрышем  $(3, 3)$  также возможно в равновесии на втором шаге игры. Далее можно рассуждать следующим образом. Если  $(M_1, M_2)$

не стало исходом первого шага, так как  $(L_1, L_2)$  предположительно будет играть на втором шаге, то каждый игрок может считать, что «что прошло, то прошло», и предпочтительная для обоих игроков ситуация  $(R_1, R_2)$  должна разыгрываться на 2-м шаге. Но если  $(R_1, R_2)$  будет исходом 2-го шага после *любого* исхода розыгрыша, то пропадают стимулы играть  $(M_1, M_2)$  на 1-м шаге: розыгрыш 1-го шага сводится просто к добавлению к каждому исходу  $(3, 3)$ . А тогда  $L_i$  есть лучший ответ игрока  $i$  на  $M_j$  игрока  $j$ .

Прежде чем перейти к бесконечным повторяющимся играм, вернемся к нашему определению и введем коэффициент дисконтирования. Считаем, что игроки дисконтируют будущие выигрыши с общим дисконтом  $\delta$ . Иногда бывает удобно рассматривать не просто суммарный выигрыш

$$\sum_{t=1}^T \delta^{t-1} u_i(a^t),$$

а нормировать его для того, чтобы рассматривать среднюю полезность за период, т. е.

$$\frac{1-\delta}{1-\delta^T} \sum_{t=1}^T \delta^{t-1} u_i(a^t) —$$

средний дисконтированный выигрыш (за период). Он показывает, сколько нужно платить игроку  $i$  в *каждом* периоде, чтобы он получил тот же суммарный выигрыш.

Если «Дилемма Заключенного» разыгрывается один раз, то нужно «сознаваться». Если разыгрывается конечное число раз, то «под-игровое совершенство» требует в последний раз «сознаться», а обратная индукция говорит, что единственное СПРН — это «сознаваться» всегда. Если игра разыгрывается бесконечное число раз, то «сознаться» остается СПРН. Более того — это единственное равновесие такое, что игра на каждом шаге *не меняется* в зависимости от того, что игралось на предыдущих шагах. Но если горизонт бесконечен и

$\delta > 1/2$ , то, как мы увидим ниже, следующий набор стратегий оказывается тоже СПРН: «молчать» (кооперироваться) на 1-м шаге и продолжать «молчать» (кооперироваться) до тех пор, пока никто не предал. Если только кто-то предал, то далее предавать всегда.

П р и м е р.

$$\begin{array}{c} U \\ M \\ D \end{array} \quad \begin{array}{ccc} L & M & R \\ \left( \begin{array}{ccc} (0,0) & (3,4) & (6,0) \\ (4,3) & (0,0) & (0,0) \\ (0,6) & (0,0) & (5,5) \end{array} \right) \end{array}$$

Считаем, что эта игра разыгрывается дважды и что выигрыши — дисконтированная сумма выигрышей.

Если эта игра разыгрывается один раз, то здесь 3 равновесия:  $(M, L)$ ,  $(U, M)$  и  $\left(\frac{3}{7}U, \frac{4}{7}M\right), \left(\frac{3}{7}L, \frac{4}{7}M\right)$  с выигрышами  $(4, 3)$ ,  $(3, 4)$  и  $\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right)$  соответственно. Здесь запись  $\left(\frac{3}{7}U, \frac{4}{7}M\right)$  означает, что с вероятностью  $\frac{3}{7}$  играется « $U$ » и с вероятностью  $\frac{4}{7}$  — играется « $M$ ». Эффективный набор выигрышей  $(5, 5)$  не достигим. Однако в двухшаговой игре с  $\delta > 7/9$  следующий набор стратегий является СПРН: «Играть  $(D, R)$  на первом шаге. Если исход первого шага  $(D, R)$ , то играть  $(M, L)$  во втором шаге; если исход первого шага — не  $(D, R)$ , то играть  $((3/7U, 4/7M), (3/7L, 4/7M))$  на втором шаге».

По построению эти стратегии используют р.Н. на 2-м шаге. Отклонение этой стратегии на 1-м шаге увеличивает текущий выигрыш на 1 и уменьшает следующие выигрыши игроков 1 и 2 соответственно с 4 или 3, до  $12/7$ . Поэтому игрок 1 не будет отклоняться, если  $1 < \left(4 - \frac{12}{7}\right)\delta$  или  $\delta > 7/16$ , а второй не будет отклоняться, если  $1 < \left(3 - \frac{12}{7}\right)\delta$  или  $\delta > 7/9$ .

Итак, как мы отмечали, имеет место следующее уточнение: если в базовой игре  $G$  есть несколько равновесий по Нэшу, то может существовать СПРН в повторяющейся игре  $G(T)$  такое, что для любого  $t < T$  исход шага  $t$  не является равновесием по Нэшу. В бесконечно повторяющихся играх справедлив более сильный результат: даже если в базовой игре  $G$  есть единственное равновесие по Нэшу, то может существовать СПРН бесконечно повторяющейся игры, в которой никакой «по-шаговый» исход не будет равновесием по Нэшу.

Итак, рассмотрим вариант «Дилеммы Заключенного», повторяющейся бесконечно, причем для любого  $t$  исходы  $t - 1$  предыдущего шага игры известны до начала разыгрывания шага  $t$ :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L_2 & R_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} L_1 \\ R_1 \end{array} & \left( \begin{array}{cc} (1, 1) & (5, 0) \\ (0, 5) & (4, 4) \end{array} \right) \end{array}$$

Разумеется, в бесконечном случае уже без дисконтирующего множителя не обойтись.

**Определение 2.5.2.** Если  $\delta$  — коэффициент дисконтирования, то приведенная стоимость бесконечной последовательности выигрышей  $\pi_1, \pi_2, \dots$  есть

$$\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \pi_t.$$

Мы покажем, что в нашем варианте «Дилеммы Заключенного» «кооперация»  $(R_1, R_2)$  на каждом шаге может быть СПРН бесконечно повторяющейся игры (хотя единственный равновесный исход в базовой игре — это  $(L_1, L_2)$ ). А именно, если игроки кооперируются сегодня, то они кооперируются и завтра, и т.д., а в противном случае они играют «плохое» равновесие.

Предположим, что игрок  $i$  начинает игру, кооперируясь, и продолжает так только и если только оба игрока кооперировались на любом предыдущем шаге. Формально его стратегия описывается следующим образом:

Играть  $R_i$  на 1-м шаге. На шаге  $t$ , если все предыдущие  $t-1$  исхода были  $(R_1, R_2)$ , играть  $R_i$ ; в противном случае играть  $L_i$ .

Это так называемая *триггерная* стратегия (стратегия переключения). Если игроки придерживаются этой стратегии, то в бесконечно повторяющейся игре равновесным исходом будет  $(R_1, R_2)$  на каждом шаге<sup>12</sup>.

Мы вначале покажем, что если  $\delta$  достаточно близко к 1, то это есть равновесие по Нэшу в бесконечно повторяющейся игре для обоих игроков, придерживающихся этой стратегии. А затем покажем, что это СПРН.

Чтобы показать, что это есть равновесие по Нэшу в бесконечно повторяющейся игре, предположим, что  $i$ -й игрок использует триггерную стратегию, и покажем, что если  $\delta$  достаточно близко к 1, то для  $j$ -го игрока лучшим ответом будет тоже применять такую стратегию. Так как игрок  $i$  будет играть  $L_i$  всегда, как только на каком-то шаге исход отличается от  $(R_1, R_2)$ , то лучшим ответом  $j$ -го будет тоже играть  $L_j$  всегда после нарушения  $(R_1, R_2)$ . Т.е. осталось определить лучший ответ  $j$ -го игрока на 1-м шаге и на всех шагах таких, что все предыдущие были  $(R_1, R_2)$ . Игра  $L_j$  даст 5 на этом шаге, но переключит на «некооперативное поведение» игрока  $i$  (а значит и  $j$ ) навсегда. Следовательно, на любом будущем шаге выигрыш будет 1; так как  $1 + \delta + \delta^2 + \dots = 1/(1 - \delta)$ , то приведенная стоимость последовательности выигрышей есть  $5 + \delta + \delta^2 + \dots = 5 + \frac{\delta}{1-\delta}$ .

С другой стороны, ответ  $R_j$  дает выигрыши 4 и аналогичный выбор между  $L_j$  и  $R_j$  на следующем шаге. Пусть  $V$  —

---

<sup>12</sup>Вообще говоря, триггерные стратегии допускают неоднократные переключения с одного хода на другой. Указанная стратегия называется иногда жесткой (или жестокой) стратегией (grim strategy).

приведенная стоимость выигрыша  $j$ -го игрока, если он играет оптимально. Если игра  $R_j$  оптимальна, то  $V = 4 + \delta V$ . Следовательно,

$$V = \frac{4}{1 - \delta}.$$

Если  $L_j$  оптимальна, то  $V = 5 + \frac{\delta}{1 - \delta}$ , следовательно,  $R_j$  оптимальна в том и только в том случае, если

$$\frac{4}{1 - \delta} \geq 5 + \frac{\delta}{1 - \delta} \quad \text{или} \quad \delta \geq \frac{1}{4}.$$

Пусть теперь  $G$  — игра с полной информацией, в которой игроки одновременно выбирают ходы. Если дана базовая игра  $G$ , то  $G(\infty, \delta)$  — это *бесконечно повторяющаяся игра*, в которой  $G$  повторяется всегда и у игроков общий коэффициент дисконтирования  $\delta$ . Для любого  $t$  исходы предыдущих  $t-1$  шагов наблюдаются до начала шага  $t$ . Выигрыш каждого игрока — приведенная стоимость его выигрышей.

Как хорошо известно, в любой игре стратегия — *полный* план действия. В статической игре с полной информацией — это просто ходы. В динамике, разумеется, все сложнее. Скажем, в двухшаговой «Дилемме Заключенного» стратегию можно записать как *пятерку*  $(v, w, x, y, z)$ :

- $v$  — на 1-м шаге;
- $w$  — ходить  $w$ , если исход был  $(L_1, L_2)$ ;
- $x$  — ходить  $x$ , если —  $(L_1, R_2)$ ;
- $y$  — ходить  $y$ , если —  $(R_1, L_2)$ ;
- $z$  — ходить  $z$ , если —  $(R_1, R_2)$ .

Это можно представить себе, как набор команд агентам: 1-й ходит на первом шаге, 2-й — на втором и т. д.

В повторяющейся игре  $G(T)$  или  $G(\infty, \delta)$  *история игры до шага  $t$*  — это «запись» ходов игроков до шага  $t$ . В конечно повторяющейся игре  $G(T)$  или бесконечно повторяющейся игре  $G(\infty, \delta)$  *стратегия игрока* описывает действие игрока, которые он предпринимает на каждом шаге, для любой возможной истории. (В этом смысле история соответствует информационному множеству: каждая история приводит к

вполне определенному информационному множеству (одноточечному), а каждому информационному множеству (одноточечному) соответствует вполне определенный путь (история), который приводит именно к этому информационному множеству.)

*Для конечно повторяющейся игры  $G(T)$  под-игра, начинающаяся на шаге  $t+1$ , — это конечно повторяющаяся игра, в которой  $G$  разыгрывается  $T - t$  раз и которая обозначается  $G(T - t)$ .*

*В  $G(\infty, \delta)$  каждая под-игра, начиная с шага  $t + 1$ , идентична  $G(\infty, \delta)$ . Игр, начинающихся с  $t + 1$ , столько же, сколько историй. Разумеется, каждая под-игра осмысленна вместе с предысторией.*

Таким образом, здесь, как и ранее, равновесие по Нэшу является СПРН, если соответствующие стратегии игроков образуют равновесие по Нэшу в любой под-игре.

СПРН является уточнением равновесия по Нэшу в том смысле, что стратегии игроков должны, во-первых, образовывать равновесие по Нэшу, а кроме того, «выдерживать» дополнительный тест — в под-играх.

Вернемся к «Дилемме Заключенного» и к триггерной стратегии, рассмотренной выше. Здесь все под-игры можно разбить на 2 группы:

- (1) под-игры, в которых все исходы предыдущих шагов были  $(R_1, R_2)$ , и
- (2) под-игры, в которых хотя бы один из предыдущих исходов был не  $(R_1, R_2)$ .

Если игроки используют триггерную стратегию во всей игре, то 1) стратегии игроков в под-игре первой группы тоже оказываются триггерными стратегиями, которые формируют равновесие по Нэшу во всей игре; 2) стратегии игроков в под-игре второй группы просто «навечно» повторяют «пошаговое» равновесие  $(L_1, L_2)$ , которое также является равновесием во всей игре. Поэтому равновесие по Нэшу в триггерных стратегиях является СПРН.

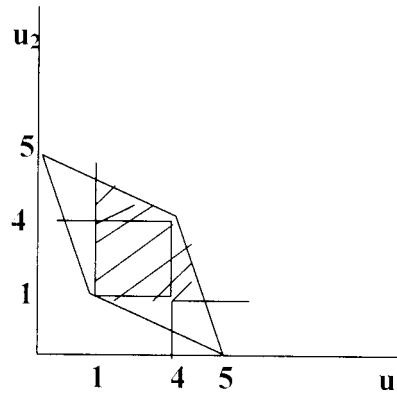


Рис. 21.

Набор выигрышей  $(x_1, \dots, x_n)$  называется *достижимым* в базовой игре  $G$ , если он является выпуклой комбинацией выигрышей в ситуациях в чистых стратегиях игры  $G$ . На рис. 21 изображено множество достижимых выигрышей в «Дилемме Заключенного» — это параллелограмм.

*Средний выигрыш (за период)* бесконечной последовательности выигрышей  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots$  при данном коэффициенте дисконтирования  $\delta$  есть

$$(1 - \delta) \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \pi_t.$$

Преимущество среднего выигрыша по сравнению с приведенной стоимостью в том, что средний выигрыш непосредственно можно сравнивать с пошаговыми выигрышами. В рассмотренном нами варианте «Дилеммы Заключенного» оба игрока могут получать выигрыш 4 в каждом периоде. Такая последовательность выигрышей дает средний выигрыш 4, а приведенную стоимость  $4/(1 - \delta)$ . С другой стороны, средний выигрыш — это просто приведенная стоимость с некоторым множителем; максимизация среднего выигрыша эквивалентна максимизации приведенной стоимости.

Мы можем сформулировать теперь знаменитую теорему, которая носит название народной (фольклорной) — Folk Theorem, которая столь хорошо известна специалистам, что ее авторство считается «народным», хотя, по-видимому, первым ее для СПРН доказал Джеймс Фридман.

**Теорема 2.5.1.** (Friedman, 1971). *Пусть  $G$  конечная, статическая игра с полной информацией. Пусть  $(e_1, \dots, e_n)$ , выигрыши в состоянии равновесия по Нэшу, и пусть  $(x_1, \dots, x_n)$  — любой достижимый вектор выигрышей в  $G$ . Если  $x_i > e_i$  для любого  $i$  и  $\delta$  достаточно близко к 1, то существует СПРН в игре  $G(\infty, \delta)$ , дающее  $(x_1, \dots, x_n)$  в качестве среднего выигрыша.*

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в учебнике Gibbons (1992). На рис. 19 множество возможных СПРН заштриховано.

**П р и м е р.** Сговор Курно-дуополистов.

Вспомним статическую дуополию по Курно. Спрос на рынке  $P(Q) = a - Q$ , где  $Q = q_1 + q_2$ ,  $Q < a$ , у фирм постоянные предельные затраты  $c$ , и нет фиксированных затрат. В единственном равновесии по Нэшу каждая фирма производит  $q_c = (a - c)/3$ . Поскольку суммарный объем в равновесии  $2(a - c)/3$  превышает монопольный объем  $q_m = (a - c)/2$ , обеим фирмам было бы лучше, если бы каждый производил половину монопольного выпуска  $q_i = q_m/2$ .

Рассмотрим бесконечно повторяющуюся игру, в которой базовая игра — это рассматриваемая дуополия по Курно, причем у обеих фирм общий коэффициент дисконтирования  $\delta$ . Мы сейчас вычислим значение  $\delta$ , для которых в совершенном «под-игровом» равновесии по Нэшу этой бесконечно повторяющейся игры играется (обеими фирмами) следующая стратегия:

Производить половину монопольного объема,  $q_m/2$ , в первом периоде. В периоде  $t$  играть  $q_m/2$ , если обе фирмы про-

изводили  $q_m/2$  в каждом из предыдущих  $t - 1$  периодов; в противном случае производить  $q_c$ .

Прибыль фирмы, когда обе фирмы производят  $q_m/2$ , есть  $(a - c)^2/8$ , которую мы обозначим через  $\pi_m/2$ . Прибыль фирмы, когда обе производят  $q_c$ , есть  $(a - c)^2/9$ , которую мы обозначим  $\pi_c$ . Далее, если фирма  $i$  собирается производить  $q_m/2$  в этом периоде, то объем, максимизирующий прибыль фирмы  $j$ , решает задачу

$$\max_{q_j} (a - q_j - \frac{1}{2}q_m - c)q_j.$$

Решением этой задачи является  $q_j = \frac{3(a-c)}{8}$  с соответствующей прибылью  $\pi_d = \frac{9(a-c)^2}{64}$ . Таким образом, ситуации, в которых фирмы играют триггерную стратегию, приведенную выше, являются равновесием по Нэшу, если

$$\frac{1}{1-\delta} \frac{1}{2} \pi_m \geq \pi_d + \frac{\delta}{1-\delta} \pi_c.$$

Подставляя  $\pi_m$ ,  $\pi_c$ ,  $\pi_d$ , получаем  $\delta \geq \frac{9}{17}$ .

## 2.6. Задачи

1. Предположим, что родитель и ребенок играют в следующую игру. Сначала ребенок выбирает действие  $A$ , которое приносит ему доход  $I_c(A)$  и доход для родителя  $I_p(A)$ . Далее, родитель наблюдает доходы  $I_c$  и  $I_p$  и затем выбирает награду  $B$  для ребенка. Функция выигрыша ребенка  $U(I_c+B)$ , родителя —  $V(I_p-B) + kU(I_c+B)$ , где  $k > 0$  отражает «родительское участие в благополучии ребенка». Допустим, что действие ребенка — это выбор неотрицательного числа  $A \geq 0$ ; функции доходов строго вогнуты  $I_c(A)$  и  $I_p(A)$  и достигают максимумов при  $A_c > 0$  и  $A_p > 0$  соответственно. Награда  $B$  может быть положительной или отрицательной; функции

полезности  $U$  и  $V$  возрастающие и строго вогнуты. Докажите, что обратная индукция дает следующий исход: ребенок выбирает действие, которое максимизирует семейный совокупный доход,  $I_c(A) + I_p(A)$ .

2. Допустим теперь, что родитель и ребенок играют в другую игру. Пусть доходы  $I_c$  и  $I_p$  фиксированы экзогенно. Во-первых, ребенок решает, сколько из дохода  $I_c$  сохранить для будущего ( $S$ ), потребляя остаток ( $I_c - S$ ) сегодня. Во-вторых, родитель наблюдает выбор ребенка  $S$  и выбирает награду  $B$ . Выигрыш ребенка — это сумма текущей и будущей полезности:  $U_1(I_c - S) + U_2(S + B)$ . Выигрыш родителя:  $V(I_p - B) + k[U_1(I_c - S) + U_2(S + B)]$ . Допустим, что функции полезности  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $V$  возрастающие и строго вогнутые. Показать, что исход обратной индукции следующий: ребенок сохраняет слишком мало, чтобы побудить родителя оставить большую награду (т.е. обе функции выигрыша родителя и ребенка могут быть увеличены, если  $S$  будет выбрано больше, а  $B$  выбрано меньше).

3. Допустим, что игроки в бесконечной игре торга по Рубинштейну имеют различные дисконтирующие множители  $\delta_1$  и  $\delta_2$  для первого и второго игрока соответственно. Показать, что обратная индукция дает следующий результат: игрок 1 предлагает соглашение

$$\left( \frac{1 - \delta_2}{1 - \delta_1 \delta_2}, \frac{\delta_2(1 - \delta_1)}{1 - \delta_1 \delta_2} \right)$$

игроку 2, и тот принимает его.

4. Рассмотрим олигополию по Курно с 3 участниками и обратной функцией спроса  $P(Q) = a - Q$ , где  $Q = q_1 + q_2 + q_3$  и  $q_i$  — объем продукции, произведенной фирмой  $i$ . Каждая фирма имеет постоянные предельные

затраты  $c$  и не имеет фиксированных затрат. Фирмы выбирают объем производства следующим образом:

(1) фирма 1 выбирает  $q_1 \geq 0$ ; (2) фирмы 2 и 3 наблюдают  $q_1$  и затем одновременно выбирают  $q_2$  и  $q_3$  соответственно. Что является совершенным под-игровым исходом в этой игре?

5. Допустим, что профсоюз является единственным поставщиком труда во все фирмы в олигополии (например, Объединенные рабочие автомобильной промышленности имеются в General Motors, Ford, Chrysler и т.п.). Пусть последовательность ходов будет следующей:

- (1) профсоюз устанавливает единую ставку заработной платы  $w$ , которую предлагает всем фирмам;
- (2) фирмы наблюдают (и принимают)  $w$  и затем одновременно выбирают уровень занятости  $L_i$  для фирмы  $i$ ;
- (3) выигрыши  $(w - w_a)L$  для профсоюза, где  $w_a$  — зарплата, которую члены профсоюза могут заработать на альтернативной работе, и  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$  — общая занятость в объединенной фирме, и  $\pi(w, L_i)$  — прибыль для фирмы  $i$ , которая устанавливается исходя из следующего предположения: все фирмы имеют производственную функцию  $q_i = L_i$ . Рыночная цена  $P(Q) = a - Q$ , где  $Q = q_1 + \dots + q_n$ . Для простоты будем предполагать, что фирмы не имеют никаких других затрат, кроме заработной платы рабочим.

Что является совершенным под-игровым исходом в этой игре? Как (и почему) количество фирм влияет на функцию полезности профсоюза в совершенном под-игровом исходе?

6. Рассмотрим две страны и будем считать, что возможны две ситуации.

В ситуации 1 обе страны устанавливают такие высокие тарифные ставки, что никакой торговли между ними не происходит. В каждой стране зарплата и занятость определяются, как в задаче 5. В ситуации 2 тарифных ставок нет. Каждый профсоюз устанавливает зарплату в своей стране, но каждая фирма производит продукцию для обоих рынков.

Допустим, что в каждой стране обратная функция спроса  $P(Q) = a - Q$ . Пусть производственная функция для каждой фирмы будет  $q = L$ , поэтому выплаты зарплаты — единственные затраты фирмы, и пусть функция полезности профсоюза будет  $U(w, L) = (w - w_0)L$ , где  $w_0$  — альтернативная заработная плата рабочих.

Найти исход с помощью обратной индукции в ситуации 1.

Теперь рассмотрим следующую игру в ситуации 2. Сначала два профсоюза одновременно выбирают зарплаты,  $w_1$  и  $w_2$ . Затем фирмы наблюдают зарплаты и выбирают продукции для домашнего и иностранного рынков, обозначенных  $h_i$  и  $e_i$  для фирмы в стране  $i$ . Вся продукция  $i$ -й фирмы производится дома, поэтому общие затраты есть  $w_i(h_i + e_i)$ . Найти совершенное под-игровое равновесие этой игры. Показать, что зарплаты, занятость и прибыль (и поэтому также полезность профсоюза и потребительский излишек) увеличиваются, по мере исчезновения тарифных ставок.

7. Статическая игра с одновременными ходами (см. рис. 22) разыгрывается дважды, причем исход первого шага наблюдается перед началом второго шага. Предположим, что нет дисконтирования. Переменная  $x > 4$ , поэтому  $(4, 4)$  не является равновесным выигрышем в «базовой» игре. Для каких значений  $x$  следующая стратегия (сыгранная обоими игроками) будет СПРН?

Сыграть  $Q_i$  на первом шаге. Если исход первого шага  $(Q_1, Q_2)$ , играть  $P_i$  на втором шаге. Если на первом шаге исход  $(y, Q_2)$ , где  $y \neq Q_1$ , играть  $R_i$  на втором шаге. Если на первом шаге исход  $(Q_1, z)$ , где  $z \neq Q_2$ , играть  $S_i$  на втором шаге. Если на первом шаге исход  $(y, z)$ , где  $y \neq Q_1, z \neq Q_2$ , играть  $P_i$  на втором шаге.

|       | $P_2$     | $Q_2$     | $R_2$      | $S_2$    |
|-------|-----------|-----------|------------|----------|
| $P_1$ | $(2, 2)$  | $(x, 0)$  | $(-1, 0)$  | $(0, 0)$ |
| $Q_1$ | $(0, x)$  | $(4, 4)$  | $(-1, 0)$  | $(0, 0)$ |
| $R_1$ | $(0, 0)$  | $(0, 0)$  | $(0, 2)$   | $(0, 0)$ |
| $S_1$ | $(0, -1)$ | $(0, -1)$ | $(-1, -1)$ | $(2, 0)$ |

Рис. 22.

8. Напомним статическую модель дуополии по Бертрону (с однородными продуктами): фирмы называют цены одновременно; спрос на продукцию  $i$ -й фирмы есть  $a - p_i$ , если  $p_i < p_j$ ; 0, если  $p_i > p_j$  и  $(a - p_i)/2$ , если  $p_i = p_j$ ; предельные затраты  $c < a$ . Рассмотрим бесконечную игру, основанную на этой первоначальной статической игре. Покажите, что фирмы могут использовать триггерные стратегии, чтобы поддержать монопольный уровень цен в совершенном под-игровом равновесии по Нэшу тогда и только тогда, когда  $\delta \geq \frac{1}{2}$ .

9. Игра «Верю—не верю»

Имеется две карты, скажем, «туз» и «шестерка». Игроют два игрока. Сначала игрок 1 наугад выбирает одну карту и не показывает ее игроку 2. Если игрок 1 вынул «туза», то он говорит об этом игроку 2 и требует выигрыш 1\$. Если игрок 1 вынул «шестерку», то у него имеется две возможности: обмануть игрока 2, сказав, что у него «туз», и потребовать 1\$ или признаться, что у него шестерка, и тогда уплатить 1 \$ игроку 2.

Если игроку 2 предлагают 1\$, то он принимает его. Если же у игрока 2 требуют 1\$, то он либо верит, что у противника «туз» и отдает 1\$, либо не верит и просит показать карту. В этом случае, если у игрока 1 действительно был «туз», игрок 2 выплачивает 2\$ игроку 1 (за то, что зря сомневался). Если же у игрока 1 оказалась «шестерка», то наказанием за обман является выплата им 2\$ игроку 2.

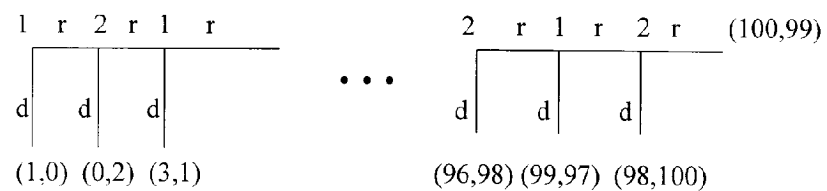
Представьте позиционную и нормальную формы этой игры и найдите равновесие по Нэшу.

10. Игра «Четное–нечетное»

Первый ход: игрок 1 выбирает одно из чисел  $\{1, 2\}$ . Второй ход (случайный): бросают монету, если выпал «Орел», то второму игроку сообщают, что выбрал игрок 1. Третий ход: игрок 2 выбирает одно из чисел  $\{3, 4\}$ . Четвертый ход (случайный): выбирается случайным образом одно из чисел  $\{1, 2, 3\}$  с заданными вероятностями 0,4; 0,2; 0,4 соответственно. В результате игры числа, выбранные на первом, третьем и четвертом ходах, складываются и игрок 2 выплачивает полученную сумму игроку 1, если она четная; если же сумма оказалась нечетной, тогда игрок 1 выплачивает ее игроку 2.

Представьте позиционную и нормальную формы игры. Найдите равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.

11. Найдите совершенное под-игровое равновесие в следующей игре, известной под названием «Сороконожка».
12. Следующая игра с одновременными ходами разыгрывается дважды, причем исход первого розыгрыша известен до начала второго розыгрыша:



|   | $L$        | $C$    | $R$    |
|---|------------|--------|--------|
| T | (3.5, 2.5) | (1, 1) | (3, 2) |
| M | (3, 2)     | (5, 5) | (2, 6) |
| B | (2, 3)     | (6, 2) | (4, 4) |

Могут ли выигрыши (5,5) достигаться на первом шаге в совершенном равновесии по Нэшу в чистых стратегиях? Ответ поясните.

## Глава 3.

# Статические игры с неполной информацией

### 3.1. Байесовы игры

До сих пор мы считали, что у игроков была вся «необходимая» информация друг о друге, включая выигрыши игроков. В реальных ситуациях, конечно, все далеко не так, и фирмы, например, могут не знать затраты других фирм, и т.д. Поэтому здесь возникает ситуация, в которой участники могут и, по-видимому, должны иметь какие-то *представления* относительно предпочтений других участников, должны иметь представления об их представлениях о предпочтениях других и т.д. Здесь мы приходим к понятию Байесовых игр (пока статических), введенных Дж. Харшаньи (Harsanyi, 1967).

Вернемся к нашей дуополии по Курно с обратной функцией спроса  $P(Q) = a - Q$ ,  $Q = q_1 + q_2$ , и рассмотрим следующую ее модификацию. Предположим теперь, что функция затрат фирмы 1 есть  $C_1(q_1) = cq_1$ , и будем считать, что функция затрат второй фирмы есть  $C_2(q_2) = C_H q_2$  с вероятностью  $\Theta$  и  $C_2(q_2) = C_L q_2$  с вероятностью  $1 - \Theta$ , причем  $C_L < C_H$ . Кроме того, будем предполагать, что фирма 2 знает свою функцию затрат и функцию затрат фирмы 1, но фирма 1 знает только

свою функцию затрат и вероятности  $\Theta$  и  $1 - \Theta$  того, что предельные затраты второй фирмы есть  $C_H$  и  $C_L$  соответственно. При этом все это общеизвестно: фирма 1 знает, что 2 имеет «больше» информации, фирма 2 знает, что 1 знает это, и т. д.

Разумеется, естественно было бы ожидать, что фирма 2 будет принимать различные решения в зависимости от своего типа, т. е. от уровня своих предельных затрат. То есть в данном случае под стратегией следует понимать отображение, которое ставит в соответствие каждому из двух возможных уровней предельных затрат  $C_H$  и  $C_L$  некоторый объем выпуска, который определялся бы фирмой 2 в случае, если бы ее предельные затраты были высокими —  $C_H$  или низкими —  $C_L$ . Забегая несколько вперед, отметим, что такое понимание стратегии близко к пониманию стратегии в играх в позиционной форме. Связано это с предположением, что игра протекает как бы следующим образом: вначале Природа «выбирает» с вероятностью  $\Theta$  и  $1 - \Theta$  соответствующий уровень предельных затрат и «сообщает» выбранный уровень *только* фирме 2, а затем уже фирмы принимают свои решения о выпусках. В этом смысле соответствующую игру можно весьма условно представить следующим образом (см. рис. 1).

Пусть  $q_2^*(C_H)$  и  $q_2^*(C_L)$  соответственно выбор фирмы 2, а  $q_1^*$  — выбор фирмы 1.

Если предельные затраты высоки, то  $q_2^*(C_H)$  (в равновесии по Нэшу) решает задачу

$$\max_{q_2} ((a - q_1^* - q_2) - C_H) q_2.$$

Аналогично  $q_2^*(C_L)$  решает задачу

$$\max_{q_2} ((a - q_1^* - q_2) - C_L) q_2.$$

Для фирмы 1  $q_1^*$  решает задачу

$$\max_{q_1} \Theta [(a - q_1 - q_2^*(C_H)) - c] q_1 + (1 - \Theta) [(a - q_1 - q_2^*(C_L)) - c] q_1.$$

Условие первого порядка дает нам

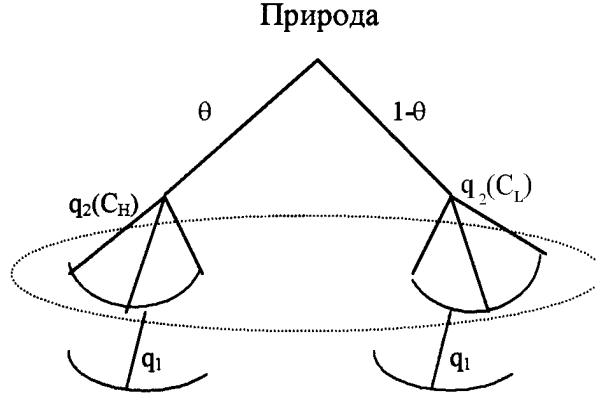


Рис. 1.

$$\begin{aligned}
 q_2^*(C_H) &= \frac{a - q_1^* - C_H}{2}, \\
 q_2^*(C_L) &= \frac{a - q_1^* - C_L}{2}, \\
 q_1^* &= \frac{\Theta[a - q_2^*(C_H) - c] + (1 - \Theta)[a - q_2^*(C_L) - c]}{2}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, мы имеем

$$\begin{aligned}
 q_2^*(C_H) &= \frac{a - 2C_H + c}{3} + \frac{1 - \Theta}{6}(C_H - C_L), \\
 q_2^*(C_L) &= \frac{a - 2C_L + c}{3} - \frac{\Theta}{6}(C_H - C_L), \\
 q_1^* &= \frac{a - 2c + \Theta C_H + (1 - \Theta)C_L}{3}.
 \end{aligned}$$

Если бы у нас была полная информация с затратами  $c_1$  и  $c_2$  соответственно, то было бы

$$q_i^* = \frac{a - 2c_i + c_j}{3}.$$

Заметим, что

$$q_2^*(C_H) > \frac{a - 2C_H + c}{3},$$

а

$$q_2^*(C_L) < \frac{a - 2C_L + c}{3}.$$

Это происходит потому, что при высоких затратах фирмы 2 конкурент (фирма 1) «недопроизводит», а при низких затратах — «перепроизводит». Связано это с тем, что фирма 1 не знает точно структуру затрат фирмы 2, а знает, что они *могут быть* (с соответствующими вероятностями) либо высокими, либо низкими. Поэтому, принимая решение об объеме выпуска своей продукции, фирма должна учитывать потенциально *обе* возможности, при этом, если ее выпуск при высоких затратах конкурента (фирмы 2) был бы  $q_1^H$ , то, учитывая возможность низких затрат у конкурента, фирма 1 должна уменьшить этот объем выпуска. Именно в этом смысле фирма 1 недопроизводит продукцию при высоких затратах конкурента. Аналогично при низких затратах конкурента фирма производит «лишнюю» продукцию.

Напомним, что для игр с полной информацией нормальная форма игры — это  $G = \{S_1, \dots, S_n, u_1, \dots, u_n\}$ , где  $S_i$  — пространство стратегий игрока  $i$ , а  $u_i(s_1, \dots, s_n)$  — выигрыш игрока  $i$  в ситуации  $(s_1, \dots, s_n)$ . (Мы опускаем здесь фиксированное множество игроков  $I$ .) Если мы рассматриваем игру с одновременными ходами, то  $S_i = A_i$  — множество ходов. Игра с полной информацией проходила так:

- (1) — игроки одновременно выбирали ходы;
- (2) — игроки получали свои выигрыши  $u_i(a_1, \dots, a_n)$ ,  $i \in I$ .

Теперь мы хотим описать ситуацию с неполной информацией. Мы должны для начала учесть как-то тот факт, что игрок знает свою функцию выигрыша, но может не знать функций выигрыша остальных игроков. Пусть возможная функция выигрыша игрока  $i$  имеет вид

$$u_i(a_1, \dots, a_n; t_i),$$

где  $t_i$  — тип игрока,  $t_i \in T_i$  — множество (пространство) возможных типов игрока  $i$ .

В приведенном выше примере с дуополией по Курно:  $T_1 = \{c\}$ ,  $T_2 = \{C_L, C_H\}$ . Сказать, что игрок  $i$  знает свою функцию выигрыша, означает, что он знает свой тип. Аналогично, если игрок не знает функций выигрышей других игроков, то соответственно он не знает их тип, т.е. он не знает

$$t_{-i} = (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n) \in T_{-i},$$

где  $T_{-i}$  — множество возможных значений  $t_{-i}$ .

Введем теперь понятие представлений. *Представления (или система представлений)*<sup>1</sup> игрока  $i$  о типах остальных игроков — это вероятность  $p_i(t_{-i}|t_i)$  того, что типы остальных игроков описываются вектором  $t_{-i} = (t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)$ , при условии, что  $i$ -й игрок имеет (и знает свой) тип  $t_i$ . В большинстве случаев, обычно предполагается, что эта вероятность не зависит от типа самого игрока, т.е. мы можем писать не условную вероятность, а просто  $p_i(t_{-i})$ .

**Определение 3.1.1.** *Байесова игра  $n$ -лиц в нормальной форме определяется:*

*набором множеств (пространств) ходов  $A_1, \dots, A_n$ ;*

*набором множеств (пространств) типов  $T_1, \dots, T_n$  игроков;*

*представлениями  $p_1, \dots, p_n$  игроков;*

*функциями выигрышей  $u_1, \dots, u_n$ .*

*Тип  $t_i \in T_i$  игрока  $i$  известен игроку  $i$  и определяет функцию выигрышей  $u_i(a_1, \dots, a_n; t_i)$ . Представления  $p_i(t_{-i}|t_i)$  игрока  $i$  описывают неопределенность относительно типов  $t_{-i}$  оставшихся  $n - 1$  игроков, при данном типе  $t_i$  игрока  $i$ . Эту игру будем обозначать  $G = \{A, T, p, u\}$ , где  $A = A_1 \times \dots \times A_n$ ,  $T = T_1 \times \dots \times T_n$ ,  $p = (p_1, \dots, p_n)$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n)$ .*

---

<sup>1</sup>Belief или system of beliefs.

Следуя Харшаньи, мы предполагаем, что игра протекает следующим образом:

- (1) Природа выбирает вектор типов  $t = (t_1, \dots, t_n) \in T = T_1 \times \dots \times T_n$ ;
- (2) Природа сообщает каждому игроку  $i$  его тип  $t_i$  (*и никому другому*);
- (3) Игроки одновременно выбирают свои ходы (соответственно,  $i$ -й игрок из —  $A_i$ );
- (4) Игроки получают выигрыши  $u_i(a_1, \dots, a_n; t_i)$ ,  $i \in I$ .

Введение этапов (1) и (2) сводит нашу игру к игре с несовершенной информацией.

Вообще говоря, можно рассматривать и случай, когда функция  $u_i$  зависит от типов и других игроков, т.е. функции выигрышей имеют вид  $u_i(a_1, \dots, a_n; t_1, \dots, t_n)$ . Однако мы не будем останавливаться на этом.

Обычно предполагается, что типы  $t$  выбираются в соответствии с априорным вероятностным распределением  $p(t)$ , и это общеизвестно.

Когда Природа «объявляет» игроку  $i$  его тип  $t_i$ , то он может вычислить представление  $p(t_{-i}|t_i)$ , используя формулу Байеса

$$p_i(t_{-i}|t_i) = \frac{p(t_{-i}, t_i)}{p(t_i)} = \frac{p(t_{-i}, t_i)}{\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p(t_{-i}, t_i)}.$$

Далее, другие игроки могут также вычислить различные представления, которые игрок  $i$  может иметь, в зависимости от типа  $t_i$ . Мы обычно будем считать, что типы игроков независимы, т.е.  $p_i(t_{-i})$  не зависит от  $t_i$ .

**Определение 3.1.2.** В статической Байесовой игре

$G = \{A_1, \dots, A_n; T_1, \dots, T_n, p_1, \dots, p_n, u_1, \dots, u_n\}$  стратегия игрока  $i$  — это функция  $s_i : T_i \rightarrow A_i$ , которая для

каждого типа  $t_i \in T_i$  определяет ход из  $A_i$ , который был бы выбран игроком  $i$ , если бы Природой был выбран его тип  $t_i$ . Символически  $S_i = A_i^{T_i}$ .

Принято выделять стратегии *разделяющие*, когда различные типы  $t_i$  выбирают различные ходы, и *объединяющие*<sup>2</sup>, когда все типы выбирают одно и то же действие. (Это различие будет существенным для нас в динамических играх.)

Здесь следует заметить следующее: на первый взгляд кажется, что после того как Природа выбрала тип и сообщила его игроку, ему уже не нужно думать о тех ходах, которые он выбрал бы, если бы был выбран другой его тип. Но игрок  $i$  должен рассматривать действия *других игроков*, которые зависят от того, что будет делать игрок  $i$ , имея любой из возможных типов  $t_i \in T_i$ : поскольку остальные игроки не знают выбранный Природой тип игрока  $i$ , они обязаны ориентироваться на *все* возможные типы игрока  $i$  (вспомним «перепроизводство» и «недопроизводство» в дуополии по Курно, рассмотренной в начале этой главы). Поэтому игрок  $i$  должен будет подумать и о том, что бы он делал, если бы были выбраны другие его возможные типы.

В нашей модели дуополии по Курно, как уже отмечалось, стратегия игрока 2 — это пара  $(q_2^*(C_H), q_2^*(C_L))$ .

Теперь мы можем дать определение Байесова равновесия, или точнее — равновесия по Байесу–Нэшу, или БН-равновесия<sup>3</sup>. Центральная идея все та же: стратегия каждого игрока должна быть лучшим ответом на стратегии других игроков, т.е. БН-равновесие — это просто равновесие по Нэшу в Байесовой игре.

**Определение 3.1.3.** В статической Байесовой игре

$G = \{A, T, p, u\}$  ситуация (т.е. набор (чистых) стратегий)  $s^*$  является БН-равновесием, если для любого  $i$  и

<sup>2</sup>Separating — разделяющие, pooling — объединяющие.

<sup>3</sup>Bayesian Nash equilibrium.

любого типа  $t_i \in T_i$   $s_i^*(t_i)$  решает задачу

$$\max_{a_i \in A_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} u_i(s_1^*(t_1), \dots, s_{i-1}^*(t_{i-1}), \\ a_i, s_{i+1}^*(t_{i+1}), \dots, s_n^*(t_n); t) p_i(t_{-i} | t_i)$$

Часто бывает удобным БН-равновесие определять следующим эквивалентным образом:

**Определение 3.3\*** *Равновесие по Байесу–Нэшу (или БН-равновесие) в игре с неполной информацией с конечным множеством типов  $T_i$  у каждого игрока  $i \in I$ , априорным распределением  $p$  и пространством чистых стратегий  $i$ -го игрока  $S_i (= A_i)$  есть равновесие по Нэшу в «расширенной игре», в которой пространство стратегий игрока — это  $S_i^{T_i}$  (т. е. множество всех отображений из  $T_i$  в  $S_i$ ).*

Таким образом, если даны ситуация  $s(\cdot)$  и произвольная стратегия  $s'_i(\cdot) \in S_i^{T_i}$ , то обозначим, как всегда, через  $(s'_i(\cdot), s_{-i}(\cdot))$  ситуацию, в которой игрок  $i$  играет  $s'_i(\cdot)$ , а другие следуют  $s(\cdot)$ . Пусть

$$(s'_i(t_i), s_{-i}(t_{-i})) = \\ (s_1(t_1), \dots, s_{i-1}(t_{i-1}), s'_i(t_i), s_{i+1}(t_{i+1}), \dots, s_n(t_n))$$

обозначает «реализацию» этой ситуации при  $t = (t_i, t_{-i})$ . Тогда ситуация (профиль)  $s(\cdot)$  есть равновесие по Байесу–Нэшу, если для любого игрока  $i$

$$s_i(\cdot) \in \text{Arg max}_{s'_i(\cdot) \in S_i^{T_i}} \sum_{t_i} \sum_{t_{-i}} p(t_i, t_{-i}) u_i(s'_i(t_i), s_{-i}(t_{-i}); (t_i, t_{-i})),$$

где  $\text{Arg max}$  обозначает множество стратегий, доставляющих максимум указанной двойной сумме.

Существование БН-равновесия немедленно следует из теоремы существования равновесия по Нэшу.

### 3.2. Альтернативный взгляд на смешанные стратегии

Мы сейчас поговорим немного об идее Харшаньи<sup>4</sup> оправдания смешанных стратегий: равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях в игре с полной информацией (почти всегда) может интерпретироваться как БН-равновесие в чистых стратегиях в некоторой «близкой» игре с «чуть-чуть» неполной информацией. («Почти всегда» в том смысле, что можно игнорировать те редкие случаи, когда такая интерпретация неуместна.)

Основная черта равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях — это даже не то, что игрок  $j$  выбирает стратегию случайно, а то, что игрок  $i$  сталкивается с некоторой неопределенностью относительно выбора игрока  $j$ , причем эта неопределенность может возникнуть или в силу наличия рандомизации, или в силу «некоторой неполноты» информации, как в следующем примере.

Вернемся к хорошо знакомой нам игре «Семейный спор» (см. рис. 2).

|    |   |        |        |
|----|---|--------|--------|
|    |   | ОНА    |        |
|    |   | Ф      | Б      |
| ОН | Ф | (2, 1) | (0, 0) |
|    | Б | (0, 0) | (1, 2) |

Рис. 2.

Здесь есть два равновесия по Нэшу в чистых стратегиях — (Ф, Ф) и (Б, Б), и одно в смешанных стратегиях, при котором:

Он играет «Ф» с вероятностью  $2/3$  и «Б» с вероятностью  $1/3$ ;

Она играет «Ф» с вероятностью  $1/3$  и «Б» с вероятностью  $2/3$ .

---

<sup>4</sup>Harsanyi (1973).

Теперь представим себе, что, хотя они знают друг друга достаточное время, они не вполне уверены относительно точного значения выигрышей друг друга. В частности, предположим, что Его (ему будет далее соответствовать индекс  $c$ ) выигрыш, когда оба идут на футбол, есть  $2 + t_c$ , причем  $t_c$  приватно известно ему; Ее выигрыш (ей соответствует индекс  $p$ ), если оба идут на балет, есть  $2 + t_p$ , что известно приватно ей. Будем считать, что  $t_c$  и  $t_p$  равномерно распределены на  $[0, x]$ . (В действительности равномерность не по существу, но главное то, что  $t_c$  и  $t_p$  слегка «возмущают» выигрыши.) Все остальные выигрыши — те же. В терминах абстрактной Байесовой статической игры в нормальной форме имеем:

$$G = \{A_c, A_p; T_c, T_p; p_c, p_p; u_c, u_p\},$$

где

$$A_c = A_p = \{\Phi, B\}; \quad T_c = T_p = [0, x];$$

представления есть

$$p_c(t_p) = p_p(t_c) = 1/x$$

для любых  $t_c$  и  $t_p$ , а выигрыши определены так, как это представлено на рис. 3.

|   |   |                |                |
|---|---|----------------|----------------|
|   |   | ОНА            |                |
|   |   | Ф              | Б              |
| С | Φ | $(2 + t_c, 1)$ | $(0, 0)$       |
|   | Б | $(0, 0)$       | $(1, 2 + t_p)$ |

Рис. 3.

Наша цель — построить БН-равновесие в чистых стратегиях этой игры с неполной информацией, в которой Он играет Φ, если  $t_c$  превосходит некоторое критическое значение  $c$  и играет Б в противном случае, а Она играет Б, если  $t_p$

превосходит критическое значение  $p$ , и  $\Phi$  в противном случае. В таком равновесии Он играет  $\Phi$  с вероятностью  $\frac{x-c}{x}$ , а Она играет  $B$  с вероятностью  $\frac{x-p}{x}$ . Заметим, что  $\frac{x-c}{x}$  — вероятность того, что  $t_c > c$ . (Это те самые вероятности, которые стоят в  $p(t_{-i}|t_i)$  в соответствующем определении БН-равновесия). Оказывается, что по мере того, как неполнота информации исчезает, т.е.  $x \rightarrow 0$ , поведение игроков в этом БН-равновесии в чистых стратегиях «приближается» к их поведению в первоначальной игре с полной информацией, т.е.

$$\frac{x-c}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x-p}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{3}$$

Представим себе, что оба игрока играют описанные стратегии. Для данного  $x$  мы определим значения  $c$  и  $p$  такие, что описанные стратегии будут образовывать равновесие по Байесу–Нэшу. Если Она играет такую стратегию, то Его ожидаемый выигрыш от игры  $\Phi$  есть

$$\frac{p}{x}(2+t_c) + \left[1 - \frac{p}{x}\right] \cdot 0 = \frac{p}{x}(2+t_c),$$

а Его ожидаемый выигрыш от игры  $B$  есть

$$\frac{p}{x} \cdot 0 + \left[1 - \frac{p}{x}\right] \cdot 1 = 1 - \frac{p}{x}.$$

Поэтому играть  $\Phi$  оптимально тогда и только тогда, когда  $t_c \geq \frac{x}{p} - 3$ . Следовательно,  $c = \frac{x}{p} - 3$ .

Аналогично, если Он играет указанную стратегию, то Ее ожидаемый выигрыш от игры  $B$  и игры  $\Phi$  — это соответственно

$$\left[1 - \frac{c}{x}\right] \cdot 0 + \frac{c}{x}[2+t_p] = \frac{c}{x}(2+t_p)$$

и

$$\left[1 - \frac{c}{x}\right] \cdot 1 + \frac{c}{x} \cdot 0 = 1 - \frac{c}{x}.$$

Таким образом, играть Б оптимально в том и только том случае, если

$$t_p \geq \frac{x}{c} - 3,$$

т.е.  $p = \frac{x}{c} - 3$ . Следовательно, мы имеем систему из 2 уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} c = \frac{x}{p} - 3, \\ p = \frac{x}{c} - 3, \end{cases}$$

, это дает  $p = c$  и  $p^2 + 3p - x = 0$ .

Решая относительно  $p$ , получаем,  $p = \frac{-3 + \sqrt{9+4x}}{2}$  — вероятность того, что Он играет Ф, а Она играет Б, т.е. соответственно  $\frac{x-c}{x}$  и  $\frac{x-p}{x}$  равны  $1 - \frac{-3 + \sqrt{9+4x}}{2x}$ , что стремится к  $2/3$  при  $x \rightarrow 0$ . Действительно, рассмотрим  $\frac{\sqrt{9+4x}-3}{2x}$ . Домножив числитель и знаменатель на  $3 + \sqrt{9+4x}$ , получаем

$$\frac{9 + 4x - 9}{2x(\sqrt{9+4x} + 3)} = \frac{2}{\sqrt{9+4x} + 3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$1 - \frac{\sqrt{9+4x} - 3}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{3}.$$

Таким образом, по мере «сокращения» неполноты информации, поведение игроков в этом равновесии по Байесу–Нэшу в чистых стратегиях «стремится» к поведению в равновесии по Нэшу в смешанных стратегиях в исходной игре с полной информацией.

### 3.3. Замечание о коррелированном равновесии

Теперь мы можем вернуться к коррелированному равновесию, упомянутому в Замечании 1.7.1. Вообще говоря, совершенно не обязательно, чтобы информация игроков была бы вполне

коррелированной, как в Замечании 1.7.1. Возможна более обшая ситуация. Предположим, например, что случайная величина может принимать 3 возможных значения —  $x^1$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ , а игрок 1 знает, что реализация есть либо  $x^1$ , либо одно из значений  $x^2$  или  $x^3$ . В то же время игрок 2 знает, что реализация есть либо  $x^3$ , либо одно из значений  $x^1$  или  $x^2$ . Это можно интерпретировать как наличие *информационного разбиения* у первого игрока  $\{\{x^1\}, \{x^2, x^3\}\}$  и *информационного разбиения* у второго игрока  $\{\{x^1, x^2\}, \{x^3\}\}$ . В этом случае стратегия игрока 1 будет состоять из двух действий — того, которое он будет предпринимать, если он знает, что реализация есть  $x^1$ , и того, которое он предпримет, если узнает, что реализация есть элемент  $\{x^2, x^3\}$ . Аналогично стратегия второго игрока — это два действия в зависимости от реализации  $x^3$  или из  $\{x^1, x^2\}$ . В этом случае стратегия игрока будет оптимальной, если при данной стратегии другого игрока, при любой реализации его сигнала он не может сыграть лучше, нежели так, как предписывает ему его стратегия.

Например, предположим, что вероятности реализации  $x^2$  и  $x^3$  есть  $\beta^2$  и  $\beta^3$ , а стратегия игрока 2 состоит в выборе  $a_2$ , если он знает, что реализация есть элемент  $\{x^1, x^2\}$ , и  $a'_2$  — если  $x^3$ . Тогда, если игрок 1 информирован о том, что реализуется либо  $x^2$ , либо  $x^3$ , он выбирает действие, оптимальное при условии, что игрок 2 выбирает  $a_2$  с вероятностью  $\frac{\beta^2}{\beta^2 + \beta^3}$  (вероятность  $x^2$  при условии  $\{x^2, x^3\}$ ) и  $a'_2$  с вероятностью  $\frac{\beta^3}{\beta^2 + \beta^3}$ .

**Определение 3.3.1.** *Коррелированным равновесием в игре  $\{I, \{A_i\}, \{u_i\}\}$  называется набор  $\{(\Omega, \pi), \{\mathcal{P}_i\}_{i \in I}, \{\sigma_i\}_{i \in I}\}$ , состоящий из конечного вероятностного пространства  $\Omega$  (пространства состояний) и вероятностной меры  $\pi$  на  $\Omega$ , информационного разбиения  $\mathcal{P}_i$  для каждого игрока  $i = 1, \dots, n$  пространства  $\Omega$ , и функций  $\sigma_i : \Omega \rightarrow A_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , обладающих свойством  $\sigma_i(w) = \sigma_i(w')$  для  $w, w' \in P_i$  для некоторого  $P_i \in \mathcal{P}_i$  ( $\sigma_i$  — стратегия*

игрока  $i$ ) таким, что для любого  $i \in I$  и любой функции  $\tau_i : \Omega \rightarrow A_i$ , для которой  $\tau_i(w) = \tau_i(w')$  для  $w, w' \in P_i$  из некоторого  $P_i \in \mathcal{P}_i$  (т. е. для любой стратегии игрока  $i$ ),

$$\sum_{w \in \Omega} \pi(w) u_i(\sigma_i(w), \sigma_{-i}(w)) \geq \sum_{w \in \Omega} \pi(w) u_i(\tau_i(w), \sigma_{-i}(w)).$$

Следующий результат принадлежит Р. Ауману (Aumann, 1974).

**Предложение 3.3.1.** *Для любого равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях  $\alpha$  конечной бескоалиционной игры  $\{I, \{A_i\}, \{u_i\}\}$  существует коррелированное равновесие  $\{(\Omega, \pi)\{\mathcal{P}_i\}, \{\sigma_i\}\}$ , в котором для каждого игрока  $i \in I$  распределение на  $A_i$ , индуцированное  $\sigma_i$ , есть  $\alpha_i$ .*

Иными словами, множество коррелированных равновесий содержит множество равновесий по Нэшу в смешанных стратегиях.

В игре «Семейный спор» три равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях дают выигрыши  $(2, 1)$ ,  $(1, 2)$  и  $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ . Кроме того, одно из коррелированных равновесий дает выигрыши  $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ . Действительно, пусть  $\Omega = \{x^1, x^2\}$ ,  $\pi(x^1) = \pi(x^2) = \frac{1}{2}$ ,  $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2\{\{x^1\}, \{x^2\}\}$ ,  $\sigma_i(x^1) = \Phi$ ,  $\sigma_i(x^2) = B$ ,  $i = 1, 2$ . Это равновесие можно интерпретировать следующим образом: игроки наблюдают за подбрасыванием монеты и в зависимости от того, что выпадет, выбирают, какое из двух «чистых» равновесий по Нэшу играть.

Заметим также, что множество всех коррелированных равновесий в игре выпукло.

### 3.4. Примеры

#### 1. «Аукцион» (Gibbons).

Представим себе, что есть 2 покупателя  $i = 1, 2$ . Покупатель оценивает некоторый неделимый товар в  $v_i$  (единиц), т.е. если он получает товар, заплатив  $b_i$ , то его выигрыш есть  $v_i - b_i$ . Будем считать, что оценки покупателей распределены независимо и равномерно на отрезке  $[0, 1]$ . Считаем также, что  $v_i \geq 0$ . Покупатели одновременно представляют свои заявки. Назвавший бóльшую цену, платит эту цену и получает товар. Другой — не получает (и не платит) ничего. Если оба называют одну и ту же цену, то бросают монетку. (Покупатели нейтральны по отношению к риску.) Все это общеизвестно.

Сформулируем это как Байесову игру, т.е. определим пространства ходов, пространства типов, представления и функции выигрышей. Действия игрока — заявить цену  $b_i$  ( $p$  оставляем для представлений), а тип есть  $v_i$ . Поскольку оценки независимы, то игрок  $i$  считает, что  $v_j$  распределено равномерно на  $[0, 1]$  вне зависимости от  $v_i$ .

Выигрыши игрока  $i$  есть:

$$u_i(b_1, b_2; v_1, v_2) = \begin{cases} v_i - b_i, & b_i > b_j, \\ (v_i - b_i)/2, & b_i = b_j, \\ 0, & b_i < b_j. \end{cases}$$

Определим пространство стратегий. По определению, стратегия игрока  $i$  — это функция  $b_i(\cdot)$ , ставящая в соответствие каждому  $v_i$  цену  $b_i(v_i)$ , которую готов заплатить игрок  $i$ , если он оценивает товар в  $v_i$ . В равновесии по Байесу–Нэшу  $b_i(\cdot)$  — это лучший ответ на стратегию 2-го  $b_2(\cdot)$  и наоборот. Формально пара  $(b_1(\cdot), b_2(\cdot))$  — равновесие по Байесу–Нэшу, если для любого  $v_i$  в  $[0, 1]$   $b_i(v_i)$  является решением задачи

$$\max_{b_i} (v_i - b_i)P\{b_i > b_j(v_j)\} + \frac{1}{2}(v_i - b_i)P\{b_i = b_j(v_j)\}.$$

Мы будем искать линейное равновесие, то есть равновесие,

образуемое линейными стратегиями  $b_1(\cdot)$  и  $b_2(\cdot)$ :

$$b_1(v_1) = a_1 + c_1 v_1 \quad \text{и} \quad b_2(v_2) = a_2 + c_2 v_2.$$

(Заметим, что мы не ограничиваем пространство стратегий линейными стратегиями. Мы допускаем *любые*, но ищем равновесие, которое будет линейным. В действительности в силу равномерности распределения оценок окажется, что равновесие не только существует, но и единственно (в смысле, который станет понятным ниже).) Мы получим, что  $b_i(v_i) = \frac{v_i}{2}$ .

Предположим, что  $j$  использует стратегию  $b_j(v_j) = a_j + c_j v_j$ . Для данного значения  $v_i$  лучший ответ  $i$  есть решение задачи

$$\max_{b_i} (v_i - b_i) P\{b_i > a_j + c_j v_j\}$$

(поскольку  $P\{b_i = b_j(v_j)\} = 0$ , так как  $b_j(v_j) = \{b_i > a_j + c_j v_j\}$  и  $v_j$  равномерно распределено, а значит и  $b_j$  распределено равномерно).

Поскольку для игрока  $i$  бессмысленно назначать цену ниже минимального назначения  $j$  и глупо — выше максимального, то  $a_j \leq b_i \leq a_j + c_j$ , и, следовательно,

$$P\{b_i > a_j + c_j v_j\} = P\left\{v_j < \frac{b_i - a_j}{c_j}\right\} = \frac{b_i - a_j}{c_j},$$

следовательно, лучший ответ игрока  $i$  есть

$$b_i(v_i) = \begin{cases} \frac{v_i + a_j}{2}, & \text{если } v_i \geq a_j, \\ a_j, & \text{если } v_i < a_j. \end{cases}$$

Если  $0 < a_j < 1$ , то существуют некоторые  $v_i$  такие, что  $v_i < a_j$ , а тогда  $b_i(v_i)$  — не линейна (она равна  $a_j$  вначале, а потом возрастает). Значит, поскольку мы ищем линейное равновесие, мы должны теперь считать, что либо  $a_j \geq 1$ , либо  $a_j \leq 0$ . Однако первое неравенство в равновесии невозможно: поскольку для более высокого типа оптимально назначать по крайней мере столько же, сколько оптимально для более низкого типа, то  $c_j \geq 0$ , но тогда  $a_j \geq 1$  давало бы  $b_j(v_j) \geq v_j$ , что

не может быть оптимальным. Следовательно, если мы хотим, чтобы  $b_i(\cdot)$  была линейной, то должно быть  $a_j \leq 0$ , следовательно,

$$b_i(v_i) = \frac{v_i + a_j}{2} = \frac{a_j}{2} + \frac{v_i}{2},$$

а это значит, что

$$a_i = \frac{a_j}{2}, \quad c_i = 1/2.$$

Повторив то же для  $j$ , предполагая, что  $i$  использует стратегию

$$b_i(v_i) = a_i + c_i v_i,$$

получаем, что  $a_i \leq 0$ ,  $a_j = \frac{a_i}{2}$ ,  $c_j = 1/2$ , и, следовательно,  $a_i = a_j = 0$ ,  $c_i = c_j = 1/2$ . Таким образом,  $b_i(v_i) = v_i/2$ .

Теперь мы обратимся к поиску симметричного равновесия, т.е. равновесия, в котором оба игрока играют одинаковые стратегии<sup>5</sup>. Предположим теперь, что оба игрока  $j$  используют стратегию  $b(\cdot)$ , причем  $b(\cdot)$  — строго возрастающая и дифференцируемая функция. Следовательно, для данного  $v_i$  оптимальная заявка игрока  $i$  решает задачу

$$\max_{b_i} (v_i - b_i) P\{b_i > b(v_j)\}.$$

Пусть  $b^{-1}(b_j)$  обозначает оценку, которую должен иметь  $j$ , чтобы заявить  $b_j$ . Т.е.  $b^{-1}(b_j) = v_j$  (если  $b(v_j) = b_j$ ).

Т.к.  $v_j$  равномерно распределено на отрезке  $[0,1]$ , то

$$P\{b_i > b(v_j)\} = P\{b^{-1}(b_i) > v_j\} = b^{-1}(b_i).$$

Условие 1-го порядка для задачи первого игрока есть

$$-b^{-1}(b_i) + (v_i - b_i) \frac{d}{db_i} b^{-1}(b_i) = 0.$$

---

<sup>5</sup>Вообще говоря, конечно, такое понимание симметричности очень сильно. Например, в равновесии в смешанных стратегиях в «Семейном споре» стратегии  $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$  и  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ , безусловно симметричны.

Далее, не слишком вдаваясь в детали, мы имеем: поскольку мы ищем симметричное (в указанном выше смысле) равновесие, то  $b_i = b(v_i)$ , следовательно,

$$-b^{-1}(b(v_i)) + (v_i - b(v_i)) \frac{d}{db} b^{-1}(b(v_i)) = 0.$$

Заметим, что  $b^{-1}(b(v_i)) = v_i$ , и следовательно,

$$-v_i + (v_i - b(v_i)) \frac{1}{b'(v_i)} = 0$$

или  $b'(v_i)v_i + b(v_i) = v_i$ . Таким образом, учитывая, что  $b'(v_i)v_i + b(v_i) = (b(v_i) \cdot v_i)'$ , мы получаем

$$b(v_i)v_i = \frac{1}{2}v_i^2 + k.$$

Для исключения  $k$  нам нужны граничные условия. Ясно, однако, что никто заявлять цену выше своей оценки не будет, следовательно,  $b(v_i) \leq v_i$  для любых  $v_i$ . В частности,  $b(0) \leq 0$ , а в силу неотрицательности  $b$  имеем  $b(0) = 0$ , а тогда  $k = 0$  и  $b(v_i) = \frac{v_i}{2}$ .

## 2. «Производство публичного продукта в условиях неполной информации». (Fudenberg, Tirole).

Два игрока  $i = 1, 2$  одновременно решают вопрос о том, вкладывать или нет в производство публичного продукта, причем решение — это 0–1 решение, т.е. 0, если не вкладывать, и 1, если вкладывать. Выгода каждого игрока есть 1, если хотя бы один решил вкладывать, и 0, если никто не вкладывает. Затраты  $i$ -го игрока на вложение есть  $c_i$ . Выигрыши изображены на рис. 4.

|            |                      |                |
|------------|----------------------|----------------|
|            | <i>вкл</i>           | <i>нет</i>     |
| <i>вкл</i> | $(1 - c_1, 1 - c_2)$ | $(1 - c_2, 1)$ |
| <i>нет</i> | $(1, 1 - c_2)$       | $(0, 0)$       |

Рис. 4.

Выгода от наличия публичного продукта — 1 каждому — общеизвестна, но затраты каждого игрока известны только ему. В то же время оба игрока считают общеизвестным, что  $c_i$  выбираются независимо, в соответствии с непрерывной, строго возрастающей кумулятивной функцией распределения  $P(\cdot)$  на  $[\underline{c}, \bar{c}]$ , где  $\underline{c} < 1 < \bar{c}$  (поэтому  $P(\underline{c}) = 0$  и  $P(\bar{c}) = 1$ ). Затраты  $c_i$  — это тип игрока  $i$ .

Чистая стратегия в этой игре — это функция  $s_i(c_i)$ , ставящая в соответствие каждому возможному типу  $c_i \in [\underline{c}, \bar{c}]$  решение вкладывать (1) или нет (0). Выигрыш  $i$ -го игрока есть

$$u_i(s_i, s_j, c_i) = \max(s_i, s_j) - c_i s_i.$$

Байесово равновесие — это пара стратегий  $(s_1^*(\cdot), s_2^*(\cdot))$  такая, что для каждого игрока  $i$  и каждого возможного типа  $c_i$  стратегия  $s_i^*(c_i)$  максимизирует ожидаемый выигрыш  $E_{c_j} u_i(s_i, s_j^*(c_j), c_i)$ . Пусть  $z_j = \text{Prob}(s_j^*(c_j) = 1)$  — равновесная вероятность того, что игрок  $j$  вкладывает. Для максимизации своей ожидаемой полезности игрок  $i$  будет вкладывать, если его затраты  $c_i$  меньше, чем  $1 \cdot (1 - z_j)$ , что представляет собой выгоду от наличия публичного продукта, умноженную на вероятность того, что  $j$  не будет вкладывать. Тогда  $s_i^*(c_i) = 1$ , если  $c_i < 1 - z_j$ , и, наоборот,  $s_i^*(c_i) = 0$ , если  $c_i > 1 - z_j$ . (Заметим, что тип  $c_i = 1 - z_j$  безразличен между тем, вкладывать или нет, но поскольку  $P(\cdot)$  непрерывна, то вероятность того, что тип будет именно таким (или любым другим определенным типом) равна 0.) Это значит, что типы игрока  $i$ , которые будут вкладывать, лежат в интервале  $[\underline{c}, c_i^*]$ . Аналогично  $j$  будет вкладывать тогда и только тогда, когда  $c_j \in [\underline{c}, c_j^*]$ .

Поскольку  $z_j = \text{Prob}(\underline{c} \leq c_j \leq c_j^*) = P(c_j^*)$ , то  $c_i^* = 1 - P(c_j^*)$ . Таким образом,  $c_1^*$  и  $c_2^*$  должны удовлетворять уравнению  $c^* = 1 - P(1 - P(c^*))$ . Если существует единственное решение этого уравнения  $c^*$ , то необходимо должно быть  $c_i^* = C^* = 1 - P(c^*)$ . Например, если  $P$  равномерно на  $[0, 2]$  ( $P(c) = c/2$ ), то  $c^*$  единственно и равно  $2/3$ . Игрок не вкла-

дывает, если его затраты лежат в промежутке  $(\frac{2}{3}, 1]$ , даже если его затраты меньше, чем его выгода, и даже если  $2/3$  — это вероятность того, что публичный продукт не будет «предложен» другим игроком.

Если же вместо  $\underline{c} = 0$  предположить  $\underline{c} \geq 1 - P(1)$ , то в игре будет два асимметричных равновесия. В них один игрок никогда не вкладывает, а другой вкладывает при всех  $c \leq 1$ . Например, равновесие, в котором игрок 1 не вкладывает, есть  $c_1^* = 1 - P(1) < \underline{c}$  и  $c_2^* = 1$ .

### 3.5. Задачи

1. Найдите все БН-равновесия (в чистых стратегиях) в следующей статической Байесовой игре:

- 1) Природа определяет, какими являются выигрыши: как в Игре 1 или как в Игре 2, причем обе игры равновероятны.
- 2) Игрок 1 (но не игрок 2) узнает, какую из двух игр выбрала Природа.
- 3) Игрок 1 выбирает  $T$  или  $B$ ; игрок 2 одновременно выбирает  $L$  или  $R$ .
- 4) Игроки получают выигрыши, выбранные Природой.

|     |          |          |
|-----|----------|----------|
|     | $L$      | $R$      |
| $T$ | $(2, 2)$ | $(0, 0)$ |
| $B$ | $(0, 0)$ | $(0, 0)$ |

*Игра 1*

|     |          |          |
|-----|----------|----------|
|     | $L$      | $R$      |
| $T$ | $(0, 0)$ | $(0, 0)$ |
| $B$ | $(0, 0)$ | $(3, 3)$ |

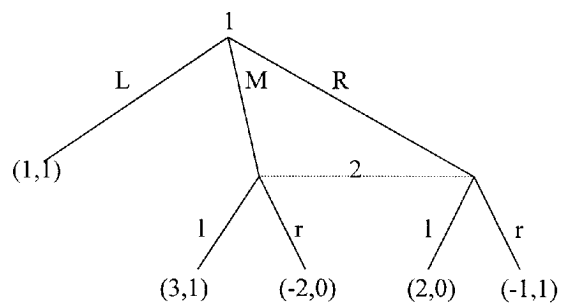
*Игра 2*

2. Рассмотрите дуополию по Курно, действующую на рынке с обратной кривой спроса вида  $P(Q) = a - Q$ , где  $Q = q_1 + q_2$ . Общие затраты фирм имеют вид  $c_i(q_i) = cq_i$ , однако спрос неопределен: он высокий ( $a = a_H$ ) с вероятностью  $p$  и низкий ( $a = a_L$ ) с вероятностью  $1 - p$ .

Кроме того, информация несимметрична: фирма 1 знает, является ли спрос высоким или низким, а фирма 2 — нет. Все это общеизвестно. Обе фирмы выбирают объем производства одновременно. Каково равновесие по Байесу-Нэшу в этой игре?

3. Рассмотрите следующую модель дуополии по Бертранию с асимметричной информацией и дифференцированной продукцией. Спрос на продукцию фирмы  $i$  есть  $q_i(p_i, p_j) = a - p_i - b_i p_j$ . Затраты нулевые для обеих фирм. Чувствительность спроса  $i$ -й фирмы относительно цены  $j$ -й фирмы либо низка, либо высока, то есть  $b_i$  равно либо  $b_H$ , либо  $b_L$ , где  $b_H > b_L > 0$ . Для каждой фирмы  $b_i = b_H$  с вероятностью  $\Theta$  и  $b_i = b_L$  с вероятностью  $1 - \Theta$  (независимо от реализации  $b_j$ ). Каждая фирма знает свое  $b_i$ , но не знает  $b_j$  конкурента. Все это общеизвестно. Каковы пространства действий (ходов), пространства типов, представления и функции выигрышей в этой игре? Каковы пространства стратегий? Какие условия определяют симметричное равновесие по Байесу-Нэшу (в чистых стратегиях) в этой игре?
4. Рассмотрите следующий вариант аукциона второй цены, когда участник  $i$  знает свою оценку  $v_i$ , однако не имеет полной информации об оценках других участников и считает, что множество возможных оценок есть конечное множество  $V$ , а оценки других игроков выбираются независимо, в соответствии с одним и тем же распределением на  $V$ . Опишите Байесову игру, соответствующую такому аукциону, и покажите, что в этой игре существует БН-равновесие  $a^*$ , в котором  $a_i^*(v_i) = v_i$  для любого  $i$  и  $v_i \in V = T_i$ .

5. Найдите множество последовательных равновесий в следующей игре, называемой «лошадью Зельтена»:



## Глава 4.

# Динамические игры с неполной информацией

### 4.1. Совершенное Байесово равновесие

В этой главе наша цель — рассмотрение совершенного Байесова равновесия.

Прежде чем обратиться непосредственно к теме данной главы, заметим следующее. Мы начинали с равновесия по Нэшу, затем, по мере усложнения рассматриваемых нами игр, мы обратились к совершенному под-игровому равновесию по Нэшу, далее к равновесию по Байесу-Нэшу и, наконец, к совершенному Байесову равновесию в динамических играх с неполной информацией. Однако это вовсе не означает, что мы вводили новые концепции. В действительности мы лишь *усливали* соответствующие определения, чтобы исключать «неуместные» равновесия в играх с более сложной структурой: более сильное равновесие отличается от более слабых только в случае более сложных игр. Поэтому, конечно, нужно отдавать себе отчет в том, что совершенное Байесово равновесие эквивалентно БН-равновесию в статических играх с неполной информацией, эквивалентно совершенному равновесию по Нэшу в динамических играх с полной и совершенной информаци-

ей и эквивалентно равновесию по Нэшу в статических играх с полной информацией.

Рассмотрим следующую динамическую игру с полной, но несовершенной информацией (Gibbons):

1) Игрок 1 выбирает  $L$ ,  $M$  или  $R$ . Если он выбирает  $R$ , то игра заканчивается. Если же он выбирает  $L$  или  $M$ , то игрок 2 узнает, что  $R$  не выбрано, но не знает, что выбрано —  $L$  или  $M$ , а затем выбирает  $L'$  или  $R'$ , и игра заканчивается (см. рис. 1).

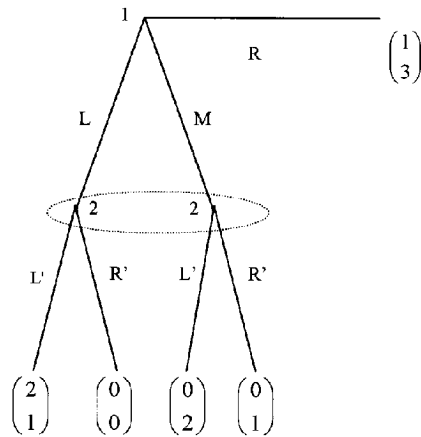


Рис. 1.

Нормальная форма этой игры есть

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} L' & R' \end{array} \\
 \begin{array}{c} L \\ M \\ R \end{array} & \left( \begin{array}{cc} (2, 1) & (0, 0) \\ (0, 2) & (0, 1) \\ (1, 3) & (1, 3) \end{array} \right)
 \end{array}$$

Легко видеть, что здесь два равновесия по Нэшу:  $(L, L')$  и  $(R, R')$ .

В этой игре нет под-игр, значит, и  $(L, L')$  и  $(R, R')$  — совершенные под-игровые равновесия по Нэшу. Но, безусловно,  $(R, R')$  — не достоверная, так как, если 2-й игрок получает

ход, то  $L'$  доминирует  $R'$ , а поэтому  $R$  не будет играть, так как в этом случае первый игрок получает 2, вместо 1 в случае игры  $R$ .

Таким образом, нам нужно исключить  $(R, R')$ . Для этого введем дополнительные требования:

R1. В каждом информационном множестве игрок, которому принадлежит очередь хода, *должен иметь представление* о том, какая вершина информационного множества достигнута. Для неоднородного множества представление — это вероятностное распределение на множестве вершин информационного множества; для однородного информационного множества представление игрока равно 1.

R2. При данных представлениях игроков, стратегии игроков должны быть *последовательно рациональны*, т.е. в каждом информационном множестве ход, сделанный игроком (действие, предпринятое игроком), и последующая стратегия игрока должны быть оптимальны, при данном представлении игрока в этом информационном множестве и последующих стратегиях остальных игроков (где под «последующей стратегией» понимается полный план действий, покрывающий все возможности, которые могут возникнуть после того, как данное информационное множество было достигнуто).

В нашем примере требование R1 дает следующую «картину» (см. рис. 2).

При данных представлениях игрока 2 его ожидаемый выигрыш от игры  $R'$  есть  $p \cdot 0 + (1 - p) \cdot 1 = 1 - p$ , а ожидаемый выигрыш от игры  $L'$  есть  $p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 2 = 2 - p$ . Так как  $2 - p > 1 - p$  при любых  $p$ , то требование R2 препятствует выбору  $R'$ .

В соответствии с R1 и R2 у игроков *должны быть представления* и игроки должны действовать оптимально при этих представлениях, однако ничего не говорится относительно осмысленности самих представлений.

**Определение 4.1.1.** Для данного равновесия в игре в позиционной форме  $\Gamma_E$  будем говорить, что информационное

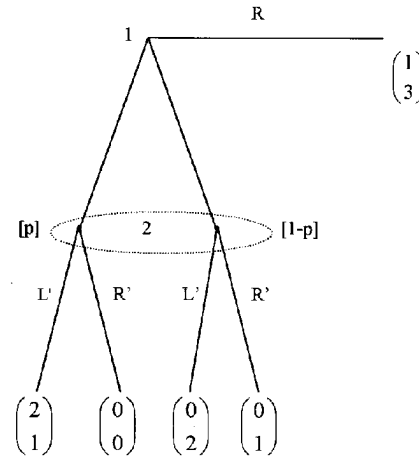


Рис. 2.

множество лежит на **равновесной траектории (пути)**, если оно достигается с положительной вероятностью (или с вероятностью 1, если играют чистые стратегии), если игра разыгрывается в соответствии с этими равновесными стратегиями, и лежит **вне равновесной траектории**, если оно достоверно (с вероятностью 1) не будет достигнуто, если игра разыгрывается в соответствии с этими равновесными стратегиями (причем здесь «равновесие» может означать равновесие по Нэшу, СПРН, БН-равновесие или совершенное Байесово равновесие).

**Р3.** В информационном множестве на равновесном пути представления определяются по правилу Байеса и равновесными стратегиями игроков.

В совершенном равновесии по Нэшу  $(L, L')$  в нашем случае, естественно, должно быть  $p = 1$ . Представим себе на минуту, что есть еще некоторое равновесие в смешанных стратегиях, в которых игрок 1 играет  $L$  с вероятностью  $q_1$ ,  $M$  — с вероятностью  $q_2$ , а  $R$  — с вероятностью  $(1 - q_1 - q_2)$ . Тогда Р3 дает нам  $p = q_1/(q_1 + q_2)$ . Как правило, в простых

экономических приложениях эти три требования и определяют совершенное Байесово равновесие, хотя в более сложных приложениях требуется еще одно требование — R4 (или его модификация). Заметим, что, как мы увидим, формулировка четвертого требования весьма туманна.

R4. В информационных множествах, лежащих вне равновесной траектории, представления определяются правилом Байеса и равновесными стратегиями, где только возможно.

Последние слова в формулировке этого требования достаточно расплывчаты, поэтому, чтобы проиллюстрировать R4, мы рассмотрим ниже пример, хотя предварительно приведем определение совершенного Байесова равновесия.

**Определение 4.1.2.** *Совершенное Байесово равновесие определяется набором стратегий и представлений, удовлетворяющих требованиям R1–R4.*

Здесь необходимо отметить следующее. По сути дела, в определении совершенного Байесова равновесия речь идет о «неподвижной точке»: с одной стороны, стратегии определяются представлениями, а с другой — представления формируются по правилу Байеса на основе этих стратегий. Иными словами, можно сказать (хотя на первый взгляд это может показаться тавтологией), что в равновесии представления должны определять такие стратегии, которые определяли бы по правилу Байеса те же самые представления, которые эти равновесные стратегии и определяют.

Рассмотрим игру, представленную на рис. 3.

Здесь одна под-игра, начинающаяся с вершины, в которой ходит игрок 2. В этой под-игре одно равновесие —  $(L, R')$ , значит, единственное совершенное равновесие по Нэшу есть  $(D, L, R')$ . Эти стратегии и представления  $p = 1$  удовлетворяют R1–R3, а требование R4 выполнено тривиально.

Теперь рассмотрим набор стратегий  $(A, L, L')$  вместе с представлением  $p = 0$ . Эти стратегии определяют равновесие по Нэшу: ни одному из игроков не выгодно отклоняться.

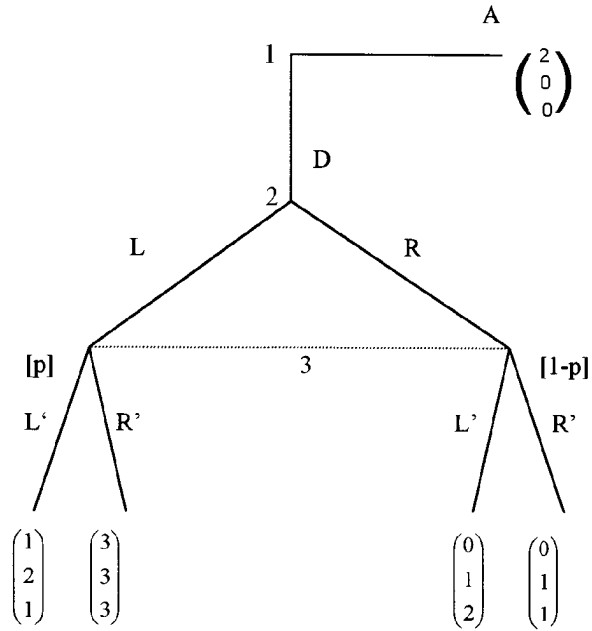


Рис. 3.

Для этих стратегий и указанного представления требования R1–R3 выполнены (игрок 3 имеет представления и действует при них оптимально, а 1 и 2 действуют оптимально при данных последующих стратегиях других игроков). Но это не совершенное равновесие по Нэшу, так как единственное равновесие по Нэшу в под-игре есть  $(L, R')$ , значит R1–R3 не гарантируют, что стратегии дают нам совершенное равновесие по Нэшу. Проблема здесь в том, что представление  $p = 0$  третьего игрока не согласовано со стратегией  $L$ , но в то же время R1–R3 не вводят никаких ограничений на его представления, так как информационное множество игрока 3 не достигается, если игра разыгрывается в соответствии с указанными стратегиями. Однако, согласно требованию R4, представление игрока 3 должно определяться стратегией игрока 2: если 2-й играет  $L$ , то  $p = 1$ , если 2-й играет  $R$ , то  $p = 0$ . Но если

$p = 1$ , то R2 форсируют стратегию  $R'$ , так что  $(A, L, L')$  и  $p = 0$  не удовлетворяют требованиям R1–R4.

Итак, мы начали некий разговор о совершенном Байесовом равновесии, при этом нельзя сказать, чтобы мы «грешили» чрезмерной строгостью. Что мы имеем в виду? Наши рассуждения о совершенности равновесия носили пока достаточно, если угодно, предварительный характер. Все дело в том, что в играх с неполной информацией, даже если игрок наблюдает действия другого игрока, он все равно не знает тип игрока, и начало периода не формирует хорошо определенную под-игру до тех пор, пока не сформированы апостериорные представления<sup>1</sup>, а поэтому мы не можем проверить, являются ли продолжения стратегий равновесием по Нэшу. Если говорить совершенно формально, то единственной под-игрой игры с неполной информацией является сама игра.

Итак, в каком-то смысле мы начинаем заново. Рассмотрим следующий пример: это вариант примера, который у нас был ранее.

**Пример** (Mas-Colell, Whinston, Green).

В отрасли есть две фирмы:  $I$  — укоренившаяся фирма, и новичок  $E$ , который может входить или не входить в отрасль, причем входить он может двумя различными способами (см. рис. 4).

Здесь, как и в той игре, которую мы уже рассматривали, два равновесия по Нэшу в чистых стратегиях:

(не входить; война, если вход),  
( $vx_1$ ; принять, если вход).

Первое кажется не очень осмысленным: независимо от того, какую стратегию входа использует  $E$ ,  $I$  предпочтет не воевать.

Критерий под-игрового совершенства здесь абсолютно бесполезен, так как единственная под-игра здесь — вся игра,

---

<sup>1</sup>Здесь и далее под апостериорными представлениями понимаются представления, формируемые игроками, в отличие от априорных, связанных с ходами Природы и общезвестных всем игрокам.

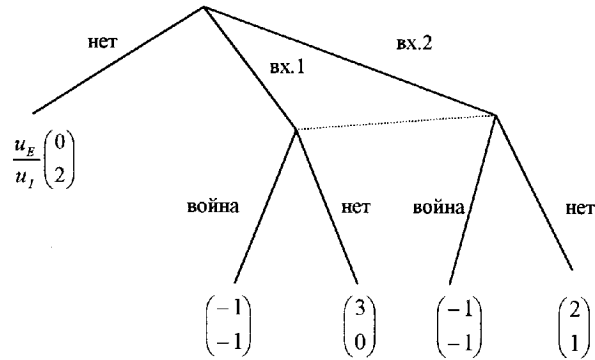


Рис. 4.

а значит, оба равновесия в чистых стратегиях совершенны.

Поэтому для того, чтобы исключить «неосмысленное» равновесие, мы можем поступить следующим образом: в духе последовательной рациональности было бы считать, что действие укоренившейся фирмы после входа должно быть оптимальным для *некоторого представления*, которое она может иметь относительно той стратегии входа, которую использовала  $E$ . (В нашем примере «война, если вход» не оптимально ни для какого возможного представления  $I$ .)

Таким образом, мы должны считать, что в любой момент игры стратегия игрока предписывает оптимальные действия с этого момента при данных стратегиях его оппонентов и его представлениях о том, что произошло в игре, и что его представления согласуются с разыгрываемыми стратегиями.

Итак, дадим формальные определения.

**Определение 4.1.3.** Система представлений  $\mu$  в игре в позиционной форме есть набор вероятностей  $\mu(x) \in [0, 1]$  для каждой вершины игры  $x$ :

$$\sum_{x \in H} \mu(x) = 1$$

для каждого информационного множества  $H$ .

Для того чтобы определить последовательную рациональность, удобно ввести следующее обозначение:  $E(u_i|H, \mu, \sigma_i, \sigma_{-i})$  — ожидаемая полезность (ожидаемый выигрыш) игрока  $i$  при начале в его информационном множестве  $H$ , если его представления, касающиеся условных вероятностей нахождения в различных вершинах  $H$ , заданы  $\mu$ , при условии, что он следует стратегии  $\sigma_i$ , а его оппоненты — стратегиям  $\sigma_{-i}$ .

**Определение 4.1.4.** *Набор стратегий (ситуация)  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  в игре в позиционной форме называется последовательно рациональным в информационном множестве  $H$  при данной системе представлений  $\mu$ , если*

$$E(u_{j(H)}|H, \mu, \sigma_{j(H)}, \sigma_{-j(H)}) \geq E(u_{j(H)}|H, \mu, \hat{\sigma}_{j(H)}, \sigma_{-j(H)})$$

для любой  $\hat{\sigma}_{j(H)} \in \Sigma_{j(H)}$ , где через  $j(H)$  обозначен игрок, который ходит в информационном множестве  $H$ , а  $\Sigma_k$  — множество смешанных стратегий игрока  $k$ . Если ситуация  $\sigma$  удовлетворяет этому условию для всех информационных множеств  $H$ , то  $\sigma$ , по определению, последовательно рациональна при данной системе представлений  $\mu$ .

Иными словами, набор стратегий  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  является последовательно рациональным, если ни один из игроков не считает целесообразным, при достижении одного из его информационных множеств, пересмотреть свои стратегии при данных представлениях (в смысле того, как это воплощено в  $\mu$ ) о том, что уже произошло, и стратегиях оппонентов.

Теперь мы можем определить *слабое совершенное Байесово равновесие* (чуть позднее будет ясно, почему мы говорим о «слабости»). Это определение включает 2 условия: во-первых, стратегии должны быть последовательно рациональны. Во-вторых, когда это возможно, представления должны быть согласованы с этими стратегиями: в равновесии у игроков должны быть *правильные* представления относительно выбора стратегий их оппонентами.

Для описания такой согласованности рассмотрим специальный случай, когда равновесная стратегия каждого игрока приписывает строго положительную вероятность каждому возможному действию в каждом из его информационных множеств (так называемая вполне смешанная стратегия). В этом случае каждое информационное множество достигается с положительной вероятностью. Естественное понятие согласованности представлений с такой ситуацией равновесия  $\sigma$  выглядит так: для каждой вершины  $x$  в данном информационном множестве  $H$  игрок должен вычислить вероятность достижения этой вершины при данном разыгрывании набора стратегий  $\sigma$ ,  $\text{Prob}(x|\sigma)$ , а затем, используя формулу Байеса, приписать условную вероятность нахождения в каждой из этих вершин, в том случае, если при разыгрывании достигнуто это информационное множество:

$$\text{Prob}(x|H, \sigma) = \frac{\text{Prob}(x|\sigma)}{\sum_{x' \in H} \text{Prob}(x'|\sigma)}.$$

В качестве иллюстрации рассмотрим наш пример, когда  $E$  использует вполне смешанные стратегии, которые приписывают «НЕТ» вероятность  $1/4$ , « $vx_1$ » —  $1/2$ , « $vx_2$ » —  $1/4$ . Тогда вероятность достижения информационного множества игрока  $I$  есть  $3/4$ . По правилу Байеса, вероятность нахождения в левой вершине этого информационного множества, при условии, что оно достигнуто, равна  $2/3$ , а условная вероятность нахождения в правой вершине равна  $1/3$ . Для представлений  $I$ , следующих за входом и согласованных со стратегией  $E$ , представления  $I$  должны приписывать именно эти вероятности.

Если стратегии не вполне смешанные, то некоторые информационные множества могут не достигаться (с положительной вероятностью), и мы не можем использовать формулу Байеса. На интуитивном уровне эта проблема соответствует следующей идее: даже если игроки разыгрывали бы игру неоднократно, то «равновесный розыгрыш» не порождает бы опыта,

на основе которого игроки могли бы основывать свои представления в этом информационном множестве. *Слабое Байесово равновесие* позволяет приписывать *любые представления* в таких информационных множествах (и в этом смысле, в частности, используется прилагательное «слабое»).

**Определение 4.1.5.** *Набор стратегий и система апостериорных представлений  $(\sigma, \mu)$  является слабым совершенным Байесовым равновесием в игре в позиционной форме  $\Gamma_E$ , если*

- (1)  *$\sigma$  последовательно рациональна при данной системе представлений  $\mu$ .*
- (2) *Система представлений  $\mu$  выводится из набора  $\sigma$  по правилу Байеса, когда только это возможно. То есть для любого информационного множества  $H$  такого, что  $\text{Prob}(H|\sigma) > 0$  (где  $\text{Prob}(H|\sigma)$  — вероятность того, что достигнуто информационное множество  $H$ ),*

$$\mu(x) = \frac{\text{Prob}(x|\sigma)}{\text{Prob}(H|\sigma)} \quad \forall x \in H.$$

(Заметим, что слабое равновесие определяется как пара  $(\sigma, \mu)$ .)

Следующее предложение (см., например, Mas-Colell, Whinston, Green) характеризует связь между слабым совершенным Байесовым равновесием и равновесием по Нэшу.

**Предложение 4.1.1.** *Набор стратегий  $\sigma$  является равновесием по Нэшу в игре в позиционной форме  $\Gamma_E$  тогда и только тогда, когда существует система представлений  $\mu$  такая, что:*

- (1)  *$\sigma$  последовательно рациональна при данной системе  $\mu$  по всем информационным множествам  $H$  таким, что  $\text{Prob}(H|\sigma) > 0$ ;*

(2) Система представлений  $\mu$  выводится из  $\sigma$  с помощью формулы Байеса, когда это возможно.

Подчеркнутая часть — это единственное отличие от Определения 4.1.5: для равновесия по Нэшу мы требуем последовательную рациональность только на равновесном пути, следовательно, слабое совершенное Байесово равновесие (ССБР) является равновесием по Нэшу, но не каждое равновесие по Нэшу является ССБР.

Продолжим рассмотрение нашего примера: ясно, что  $I$  должна играть «принять, если вход» в любом ССБР, так как это оптимальное действие фирмы  $I$ , начиная с ее информационного множества при *любой* системе представлений. Таким образом, равновесные по Нэшу стратегии (нет; война, если вход) не могут быть частью никакого ССБР. Теперь посмотрим пару стратегий ( $vx_1$ ; принять, если вход). Чтобы доказать, что это есть часть ССБР, нам нужно снабдить эти стратегии системой представлений, удовлетворяющей условию (2) в Определении 4.1.5, и которое бы сделало эти стратегии последовательно рациональными. Заметим, во-первых, что для того, чтобы удовлетворить критерию (2), представления  $I$  должны приписывать вероятность 1 нахождению в левой вершине ее информационного множества, так как это информационное множество достигается с положительной вероятностью при данных стратегиях ( $vx_1$ ; принять, если вход). Более того, эти стратегии в действительности последовательно рациональны при данной системе представлений, и эта пара «стратегии-представления» — единственное ССБР.

Далее рассмотрим еще 2 примера.

**Пример 2** (Mas-Colell, Whinston, Green).

Считаем, что появился 2-й потенциальный новичок  $E2$  и теперь ситуация такова: фирма  $E1$  обладает достаточными возможностями, чтобы войти в рынок самостоятельно, но ей не достает некоторых возможностей, которые имеет фирма  $E2$ . Как результат фирма  $E1$  рассматривает вариант предложения

о создании с Е2 «совместного предприятия», причем в случае создания такого предприятия Е2 делит с Е1 ее «возможности» и эти обе фирмы делят получающийся доход. Е1 имеет 3 варианта действий: не входить, войти самостоятельно или предложить кооперацию. Если она предлагает кооперацию, то Е2 может либо принять предложение, либо отвергнуть. Если Е2 принимает предложение, то Е1 входит вместе с Е2; если Е2 отвергает, то Е1 решает, входить ли самостоятельно или нет.  $I$  может наблюдать вошла ли Е1, но не знает, вошла ли фирма «отдельной единицей» или «совместным предприятием» (рис. 5).

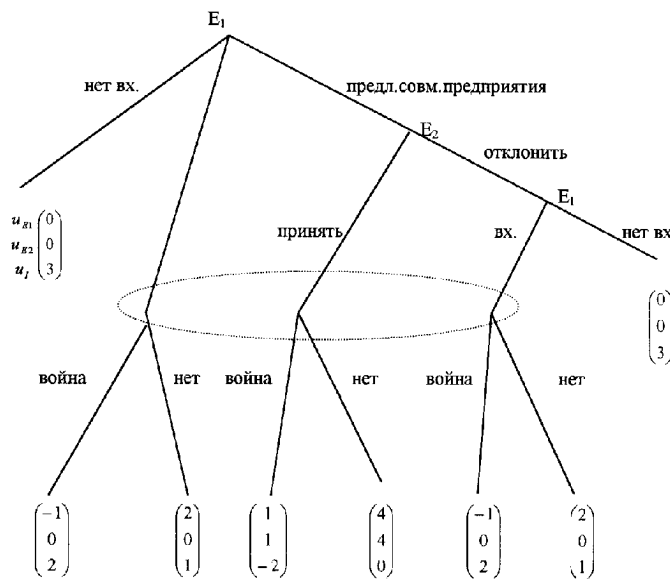


Рис. 5.

Для определения ССБР заметим, что в любом ССБР Е2 должна принять предложение Е1, так как в этом случае Е2 гарантирует себе положительный выигрыш независимо от стратегии  $I$ . Но тогда в любом ССБР Е1 должна предложить кооперацию, так как если Е2 принимает предложение, то Е1 получает больше независимо от «пост-входной» стратегии  $I$ .

Далее, эти два вывода приводят к тому, что информационное множество игрока  $I$  достигается с положительной вероятностью (в действительности равной 1) в любом ССБР. Теперь, используя правило Байеса в этом информационном множестве, мы заключаем, что это правило должно приписывать вероятность 1 нахождения в средней вершине. В этом случае, в любом ССБР стратегия фирмы  $I$  должна быть «принять, если вход». Наконец, если  $I$  играет «принять, если вход», то  $E1$  должна входить, если она предложила кооперацию, но  $E2$  отвергла.

Следовательно, *единственное ССБР* в этой игре есть набор стратегий

$(\sigma_{E1}, \sigma_{E2}, \sigma_I) = ((\text{предложение кооперации; вх., если } E2 \text{ отвергнуто}), (\text{принять}), (\text{принять, если «вход»}))$  и система представлений

$$\mu \text{ (средняя вершина)} = 1.$$

Заметим, что это не единственное равновесие по Нэшу (а потому и не единственное СПРН). Например,  $(\sigma_{E1}, \sigma_{E2}, \sigma_I) = ((\text{нет, нет, если } E2 \text{ отклонит}), (\text{отклонить}), (\text{война, если «вход»}))$  является СПРН в этой игре.

**П р и м е р 3** (Mas-Colell, Whinston, Green).

В приведенных выше примерах все было совсем просто, так как кто-то из игроков имел оптимальную стратегию, которая была независима от его представлений и/или дальнейшей игры оппонентов. Рассмотрим теперь следующую игру (см. рис. 6).

Чтобы решить эту игру, найдем «неподвижную точку», при которой поведение, порожденное представлениями, согласовано с этими представлениями. Считаем, что  $\gamma > 0$ .

Пусть  $\sigma_F$  — вероятность того, что фирма  $I$  воюет после входа.

Пусть  $\mu_1$  — представление фирмы  $I$ , что стратегией входа был  $vx_1$  (если он состоялся), и пусть  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$  — вероятности, с которыми фирма действительно выбирает «нет»,  $vx_1$ ,  $vx_2$  соответственно.

Заметим, что  $I$  захочет воевать с положительной вероятностью тогда и только тогда, когда  $-1 \geq -2\mu_1 + 1(1 - \mu_1)$ ,

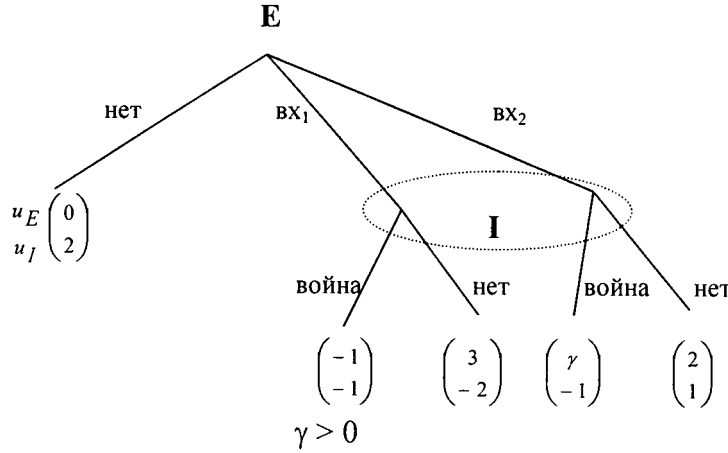


Рис. 6.

т.е. если  $\mu_1 \geq 2/3$ .

Предположим, что  $\mu_1 > 2/3$  в ССБР. Следовательно, фирма  $I$  должна играть «войну» с вероятностью 1. Но тогда  $E$  должна играть  $вх_2$  с вероятностью 1 (т.к.  $\gamma > 0$ ) и тогда ССБР требует, чтобы  $\mu_1 = 0$ . Предположим теперь, что  $\mu_1 < 2/3$  в ССБР, следовательно,  $I$  должна играть «принять» с вероятностью 1. Но тогда  $E$  должна играть « $вх_1$ » с вероятностью 1, и ССБР требует, чтобы  $\mu_1 = 1$ . Значит, в любом ССБР  $\mu_1 = 2/3$ . Следовательно,  $E$  должна рандомизировать в этом равновесии, приписывая  $вх_1$  и  $вх_2$  положительную вероятность, причем  $вх_1$  должен быть «вдвое вероятнее», чем  $вх_2$ . Это означает, что вероятность играть «войну» должна делать  $E$  безразличной между  $вх_1$  и  $вх_2$ , следовательно,  $-\sigma_F + 3(1 - \sigma_F) = \gamma\sigma_F + 2(1 - \sigma_F)$  или  $\sigma_F = 1/(\gamma + 2)$ .

Выигрыш  $E$  от игры  $вх_1$  или  $вх_2$  есть  $(3\gamma + 2)/(\gamma + 2) > 0$  и, следовательно,  $E$  должна играть «нет» с вероятностью 0. Значит, единственное ССБР в этой игре, когда  $\gamma > 0$ , есть

$$(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2) = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}), \quad \sigma_F = 1/\gamma + 2, \quad \mu_1 = \frac{2}{3}.$$

Мы называли равновесие слабым, так как требования согласованности были минимальны: единственное требование для представлений, кроме неотрицательности и равенства суммы вероятностей единице в информационном множестве, состояло в том, что они должны быть согласованы с равновесными стратегиями на равновесном пути, в том смысле, что они должны выводиться из формулы Байеса. При этом не было никаких ограничений на представления *вне* равновесного пути. Однако это иногда желательно. Но мы на этом подробно останавливаться не будем.

П р и м е р 4 (Mas-Colell, Whinston, Green).

Чистые стратегии и представления, отмеченные на рис. 7, стрелками образуют ССБР.

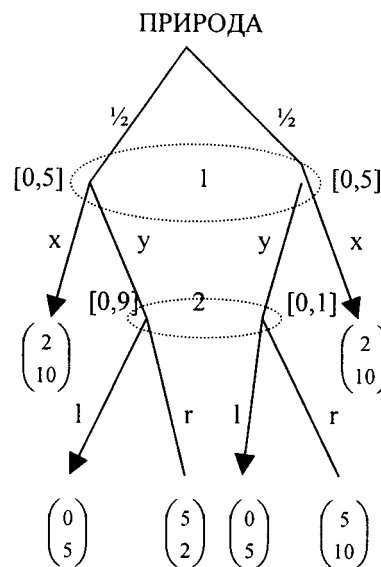


Рис. 7.

Представления удовлетворяют свойству (2): только информационное множество игрока 1 достигается с положительной вероятностью, а его представления отражают вероятностное

распределение на множестве ходов Природы. Представления 2-го не очень осмысленны. Информационное множество второго игрока может быть достигнуто только, если 1 отклонился, выбирая  $y$  с положительной вероятностью, причем отклонение должно быть независимо от действительного выбора Природы. Поэтому игрок 2 осмысленно может иметь только представления, которые приписывают равные вероятности этим двум вершинам в его информационном множестве, значит, желательно требовать «структурной согласованности» вне равновесного пути в том смысле, что существует *некоторое* субъективное вероятностное распределение на наборах стратегий, которое может порождать вероятности, согласованные с представлениями.

Заметим также, что *ССБР не обязательно является совершенным под-игровым равновесием*. Рассмотрим игру, изображенную на рис. 8.

ССБР здесь есть  $(\sigma_E, \sigma_I) = ((\text{нет, принять если вход}), (\text{война, если вход}))$  вместе с указанными представлениями. Но это не совершенное под-игровое равновесие, так как оно не дает равновесия по Нэшу в «пост-входной» под-игре.

Проблема в том, что «пост-входные» представления фирмы I относительно игры фирмы E не ограничены ССБР, так как информационное множество фирмы I — вне равновесного пути.

Значит, ССБР может быть слишком слабым.

В приложениях обычно вводятся дополнительные требования согласованности, чтобы избежать этих проблем. Получающееся равновесие и называют совершенным Байесовым равновесием. Формальные определения и обсуждение некоторых понятий совершенного Байесова равновесия можно найти в книге Fudenberg, Tirole.

Мы рассмотрим подробнее совершенное под-игровое равновесие на примере сигнальных игр (см. п. 4.3), где оно совпадает с *последовательным равновесием*<sup>2</sup> Вилсона-Крепса,

---

<sup>2</sup>Sequential equilibrium.

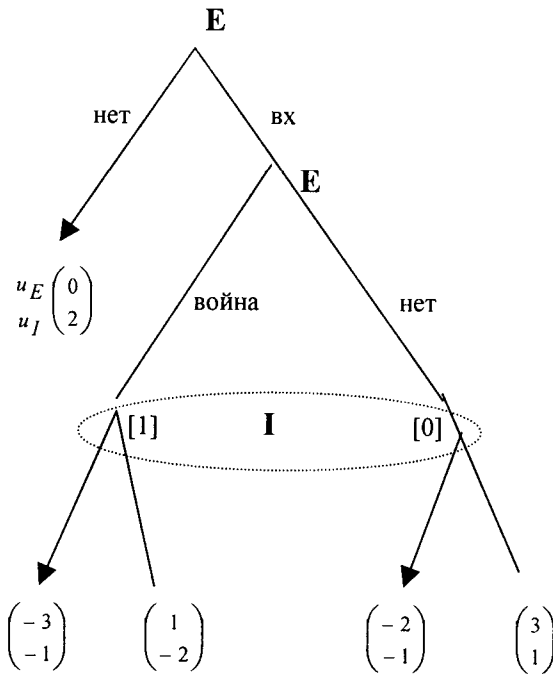


Рис. 8.

на котором мы сейчас кратко остановимся.

## 4.2. Последовательное равновесие

Важным, тесно связанным с ССБР понятием равновесия, которое в то же время усиливает понятие слабого совершенного Байесова равновесия за счет введения дополнительного условия согласованности представлений, является понятие последовательного равновесия (Wilson, Kreps, 1982). В противоположность совершенному Байесову равновесию, в понятии последовательного равновесия эта согласованность вводится не прямым, а косвенным образом через сходящиеся последовательности стратегий.

**Определение 4.2.1.** Пара  $(\sigma, \mu)$ , состоящая из набора стратегий и системы представлений, называется последовательным равновесием в позиционной игре  $\Gamma_E$ , если: (1) набор стратегий  $\sigma$  последовательно рационален при данной системе представлений  $\mu$ ; (2) существует последовательность вполне смешанных стратегий (то есть стратегий, в которых каждая чистая стратегия играет с положительной вероятностью)  $\{\sigma^k\}_{k=1}^\infty$  такая, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma^k = \sigma$ , причем  $\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu^k$ , где  $\mu^k$  — представления, выводимые из набора стратегий  $\sigma^k$  по правилу Байеса.

По существу, речь идет о том, что последовательное равновесие требует, чтобы представления возникали из некоторого множества «близких» к  $\sigma$  вполне смешанных стратегий. Это можно рассматривать как требование того, что игроки определяют свои представления, делая, с некоторой малой вероятностью, ошибки в выборе своих стратегий. Важно отметить, что каждое последовательное равновесие является ССБР, поскольку предельные представления в точности совпадают с представлениями, выводимыми из равновесных стратегий  $\sigma$  по правилу Байеса на траектории, определяемой профилем  $\sigma$ . Обратное, вообще говоря, неверно.

Последовательному равновесию удастся избежать тех осложнений, с которыми мы столкнулись в двух последних примерах. Действительно, вернемся к игре, изображенной на рис. 7. В этой игре все представления, которые можно вывести из любой последовательности вполне смешанных стратегий, приписывают равные вероятности двум вершинам из информационного множества игрока 2. Поэтому в любом последовательном равновесии игрок 2 должен играть  $r$ , а игрок 1 должен играть  $y$ . В действительности пара стратегий  $(r, y)$  и представления, приписывающие равные вероятности вершинам каждого из двух информационных множеств, определяют единственное последовательное равновесие в этой игре.

Что касается примера, изображенного на рис. 8, то стратегии единственного последовательного равновесия в этой игре являются стратегиями единственного СПРН: ((вход; нет, если вход), (нет, если  $E$  входит)). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим любую вполне смешанную стратегию  $\sigma'$  и любую вершину  $x$  в информационном множестве  $I$ , которое мы обозначим через  $H_I$ . Пусть  $z$  обозначает вершину, следующую за входом игрока  $E$  (т.е. начальную вершину под-игры, следующей за входом). Тогда представления  $\mu'_\sigma$ , соответствующие  $\sigma'$  в информационном множестве  $H_I$ , определяются следующим образом:

$$\mu_{\sigma'}(x) = \frac{Pr(x|\sigma')}{Pr(H_I|\sigma')} = \frac{Pr(x|z, \sigma')Pr(z|\sigma')}{Pr(H_I|z, \sigma')Pr(x|\sigma')},$$

где  $Pr(x|z, \sigma')$  — вероятность достижения вершины  $x$  в случае применения стратегий  $\sigma'$  при условии достижения вершины  $z$ . После сокращения и с учетом того факта, что  $Pr(H_I|z, \sigma') = 1$ , мы получаем  $\mu'_\sigma(x) = Pr(x|z, \sigma')$ . Но это как раз и есть вероятность того, что фирма  $E$  выбирает действие, приводящее к вершине  $x$  в стратегии  $\sigma'$ . Поэтому любая последовательность вполне смешанных стратегий  $\{\sigma'_k\}_{k=1}^\infty$ , сходящаяся к  $\sigma$ , должна порождать предельные представления фирмы  $I$ , которые совпадают с игрой в вершине  $z$ , предписываемой реальной стратегией  $\sigma_E$ . Из этого немедленно следует, что стратегии в каждом последовательном равновесии должны определять равновесное по Нэшу поведение в этой «пост-входной» под-игре, а поэтому должны образовывать СПРН.

**Предложение 4.2.1.** (Kreps, Wilson, 1982). *В каждом последовательном равновесии  $(\sigma, \mu)$  позиционной игры  $\Gamma_E$  набор равновесных стратегий  $\sigma$  образует совершенное под-игровое равновесие по Нэшу.*

Таким образом, последовательное равновесие усиливает и понятие СПРН и понятие ССБР: каждое последовательное равновесие является и СПРН, и ССБР.

### 4.3. Сигнальные игры

Сигнальная игра — это динамическая игра с неполной информацией двух игроков:  $S$  (Sender) — ведущего (посылающего сигнал) и  $R$  (Receiver) — получателя сигнала. Игра протекает следующим образом:

1. Природа выбирает тип  $t_i$  для ведущего из множества возможных типов  $T = \{t_1, \dots, t_I\}$  в соответствии с вероятностным распределением  $p(t_i) : p(t_i) > 0$  для любого  $i$  и  $p(t_1) + \dots + p(t_I) = 1$ .
2. Ведущий наблюдает  $t_i$  и выбирает сигнал  $m_j$  из множества возможных сообщений  $M = \{m_1, \dots, m_J\}$ .
3. Получатель наблюдает (получает сигнал)  $m_j$  (но не  $t_i$ ) и затем выбирает действие  $a_k$  из множества  $A = \{a_1, \dots, a_K\}$ .
4. Определяются выигрыши  $U_S(t_i, m_j, a_k)$  и  $U_R(t_i, m_j, a_k)$ .

Разумеется, естественно считать, что множество возможных сообщений зависит от типа игрока, а множество возможных действий зависит от полученного сигнала. Так, скажем, в модели сигнализирования на рынке труда  $S$  — рабочий, а  $R$  — это перспективный рынок занятости, тип — это производительность рабочего, а сообщение — это выбор уровня образования, и, наконец, действие — это уровень заработной платы. В модели корпоративных капиталовложений и структуры капиталов  $S$  — фирма, нуждающаяся в финансировании нового проекта,  $R$  — потенциальный инвестор, тип — прибыльность имеющихся активов фирмы, сообщение — это предложение фирмой долевой ставки отдачи, а действия — решения инвестора вкладывать или нет. В некоторых случаях сигнальная игра может быть частью более сложной игры, т.е. например, может быть некоторое действие получателя до выбора сообщения ведущим  $S$ .

Мы остановимся на простом случае:

$$T = \{t_1, t_2\}, \quad M = \{m_1, m_2\}, \quad A = \{a_1, a_2\}, \quad \text{Prob}\{t_1\} = p.$$

Дерево такой сигнальной игры удобно изображать следующим образом (мы не указываем здесь выигрыши в терминальных вершинах) (рис. 9):

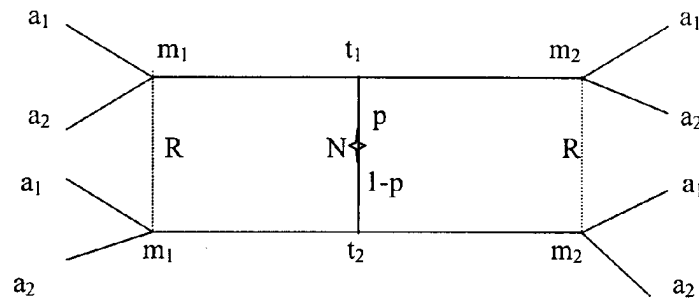


Рис. 9.

Как всегда, стратегия игрока — это полный план действий: стратегия предписывает допустимое действие в каждом случае, когда игроку, может быть, придется сделать ход. В сигнальной игре чистая стратегия игрока  $S$  — это функция  $m(t_i)$ , указывающая, какое сообщение будет выбрано для каждого типа, который может выбрать Природа, а чистая стратегия игрока  $R$  — это функция  $a(m_j)$ , указывающая, какое действие будет выбрано для каждого возможного сообщения  $S$ . В изображенной игре может быть всего 4 (чистых) стратегии у каждого из игроков:

Первая стратегия  $S$  — сыграть  $m_1$ , если Природа выбрала  $t_1$ , и сыграть  $m_1$ , если  $t_2$ .

Вторая стратегия  $S$  — сыграть  $m_1$ , если Природа выбрала  $t_1$ , и сыграть  $m_2$ , если  $t_2$ .

Третья стратегия  $S$  — сыграть  $m_2$ , если Природа выбрала  $t_1$ , и сыграть  $m_1$ , если  $t_2$ .

Четвертая стратегия  $S$  — сыграть  $m_2$ , если Природа выбрала  $t_1$ , и сыграть  $m_2$ , если  $t_2$ .

Первая стратегия  $R$  — сыграть  $a_1$ , если  $S$  выбрала  $m_1$ , и сыграть  $a_1$ , если  $m_2$ .

Вторая стратегия  $R$  — сыграть  $a_1$ , если  $S$  выбрала  $m_1$ , и сыграть  $a_2$ , если  $m_2$ .

Третья стратегия  $R$  — сыграть  $a_2$ , если  $S$  выбрала  $m_1$ , и сыграть  $a_1$ , если  $m_2$ .

Четвертая стратегия  $R$  — сыграть  $a_2$ , если  $S$  выбрала  $m_1$ , и сыграть  $a_2$ , если  $m_2$ .

Первая и четвертая стратегии  $S$  — *объединяющие*, так как каждый тип посылает один и тот же сигнал, а вторая и третья — *разделяющие*, так как каждый тип посылает разные сигналы. В моделях с более чем двумя типами могут быть частично объединяющие (или полуразделяющие) стратегии, когда все типы из некоторого подмножества типов посылают один и тот же сигнал, но разные подмножества типов посылают различные сообщения. Есть также гибридные стратегии, например,  $t_1$  посылает  $m_1$ , а  $t_2$  рандомизирует  $m_1$  и  $m_2$ .

Поскольку  $S$  знает всю историю игры и его выбор осуществляется в одноточечном информационном множестве, то вопрос о его представлениях не возникает. Что касается  $R$ , то он выбирает действие после наблюдения сообщения  $S$ , но не зная тип  $S$ , значит, выбор  $R$  происходит в неодноточечном информационном множестве. Поэтому теперь мы можем переформулировать требования, которые мы рассматривали в начале этой главы для сигнальных игр.

*Сигнальное требование 1.* После получения каждого сообщения  $m_j$  из  $M$   $R$  должен иметь представление о том, какой тип мог послать сообщение  $m_j$ . Обозначим соответствующее вероятностное распределение через  $\mu(t_i|m_j)$ , где  $\mu(t_i|m_j) \geq 0$  для любого  $t_i \in T$  и

$$\sum_{t_i \in T} \mu(t_i|m_j) = 1$$

$(\mu(t_i|m_j))$  — вероятность того, что сообщение  $m_j$  послано типом  $t_i$ .

При данном сообщении  $S$  и представлении  $R$  оптимальное действие характеризуется с помощью требования последовательной рациональности:

*Сигнальное требование 2R.* Для любого  $m_j \in M$  действие  $R$ ,  $a^*(m_j)$ , должно максимизировать ожидаемую полезность  $R$  при данном представлении  $\mu(t_i|m_j)$  относительно того, какой тип мог послать сообщение  $m_j$ . То есть  $a^*(m_j)$  решает задачу

$$\max_{a_k \in A} \sum_{t_i \in T} \mu(t_i|m_j) U_R(t_i, m_j, a_k).$$

Требование последовательной рациональности применимо и к  $S$ , но  $S$  имеет *полную информацию*, а следовательно тривиальные представления, а кроме того, он ходит только в начале игры, значит стратегия  $S$  должна быть оптимальна при данной стратегии  $R$ .

*Сигнальное требование 2S.* Для любого типа  $t_i \in T$  сообщение  $m^*(t_i)$  игрока  $S$  должно максимизировать полезность  $S$  при данной стратегии  $a^*(m_j)$  игрока  $R$ . Т.е.  $m^*(t_i)$  решает задачу

$$\max_{m_j \in M} U_s(t_i, m_j, a^*(m_j)).$$

Наконец, при данной стратегии  $m^*(t_i)$  игрока  $S$ , обозначим через  $T_j$  множество типов, которые посылают сообщение  $m_j$ . Т.е.  $t_i \in T_j$ , если  $m^*(t_i) = m_j$ . Если  $T_j$  — непусто, то информационное множество, соответствующее сообщению  $m_j$ , лежит на равновесном пути; в противном случае  $m_j$  не посылается никаким типом, и соответственно информационное множество находится вне равновесного пути. Поэтому требование 3 можно переписать для  $R$  следующим образом.

*Сигнальное требование 3.* Для любого  $m_j$  в  $M$ , если существует  $t_i$  в  $T$  такой, что  $m^*(t_i) = m_j$ , представление  $R$  в информационном множестве, соответствующем  $m_j$ , должно определяться по правилу Байеса и исходя из стратегии  $S$ , т.е.

$$\mu(t_i|m_j) = \frac{p(t_i)}{\sum_{t_i \in T_j} p(t_i)}.$$

**Определение 4.3.1.** *Совершенное Байесово равновесие (в чистых стратегиях) в сигнальной игре есть пара стратегий  $m^*(t_i)$ ,  $a^*(m_j)$  и представление  $\mu(t_i|m_j)$ , удовлетворяющие сигнальным требованиям 1, 2R, 2S и 3.*

Если стратегия  $S$  является объединяющей или разделяющей, то равновесие называется объединяющим или разделяющим соответственно.

**Пример** (Gibbons). Рассмотрим сигнальную игру, изображенную на рис. 10.

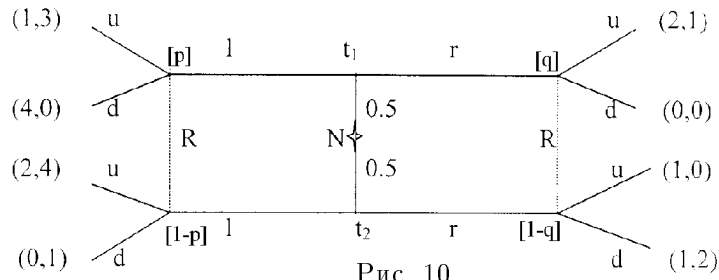


Рис. 10.

Здесь потенциально может существовать 4 совершенных Байесовых равновесия в чистых стратегиях.

- (1) объединяющее на  $l$ ;
- (2) объединяющее на  $r$ ;
- (3) разделяющее с  $t_1$ , играющим  $l$ , и  $t_2$ , играющим  $r$ ;
- (4) разделяющее с  $t_1$ , играющим  $r$ , и  $t_2$ , играющим  $l$ .

Рассмотрим эти возможности поочередно.

(1) Объединяющее на  $l$ . Предположим, что есть равновесие, в котором стратегия  $S$  есть  $(l, l)$ , т.е.  $t_1$  играет  $l$  и  $t_2$  играет  $l$ . (Запись  $(m', m'')$  означает, что тип  $t_1$  посылает сигнал  $m'$ , а тип  $t_2$  посылает сигнал  $m''$ .) Тогда информационное множество  $R$ , соответствующее  $l$ , лежит на

равновесном пути, поэтому представление  $(p, 1 - p)$  в этом информационном множестве определяется правилом Байеса и стратегией  $S$ , а именно  $p = 0.5$  — априорное распределение. При таком представлении (или любом другом представлении), лучший ответ  $R$  на  $l$  — это сыграть  $u$ , так что типы  $t_1$  и  $t_2$  получают соответственно 1 и 2. Чтобы определить, будут ли оба типа действительно играть  $l$ , нам надо уточнить еще, как  $R$  реагировал бы на  $r$ . Если ответ  $R$  на  $r$  есть  $u$ , то выигрыш типа  $t_1$  от игры  $r$  есть 2, что превосходит выигрыш  $t_1$  от игры  $l$ , поэтому если ответ  $R$  на  $r$  есть  $u$ , то типу  $t_1$  играть  $l$  не следует. Но если ответ  $R$  на  $r$  есть  $d$ , то  $t_1$  и  $t_2$  получают 0 и 1 от игры  $r$ , тогда как они получают 1 и 2 (соответственно) от игры  $l$ . Таким образом, если существует равновесие, в котором стратегия  $S$  есть  $(l, l)$ , то ответ  $R$  на  $r$  должен быть  $d$ , а значит, стратегия  $R$  должна быть  $(u, d)$  (где  $(a', a'')$  означает, что  $R$  играет  $a'$  на  $l$  и  $a''$  на  $r$ ). Остается определить те представления  $R$  в информационном множестве, соответствующем  $r$ , при которых для него оптимально играть  $d$ . Легко видеть, что играть  $d$  оптимально для  $R$  при любом  $q \leq 2/3$ . Действительно, для данных представлений  $[q, 1 - q]$  игрока  $R$  ожидаемый выигрыш  $R$  от игры  $u$  есть  $1 \cdot q + 0(1 - q)$ , от игры  $d$  есть  $0 \cdot q + 2(1 - q)$ . Значит, играть  $d$  оптимально, если  $2(1 - q) \geq 1 \cdot q$ , т.е.  $q \leq \frac{2}{3}$ .

Следовательно,  $[(l, l), (u, d), p = 0.5, q]$  является объединяющим совершенным Байсовым равновесием для любого  $q \leq 2/3$ .

(2) Объединяющее на  $r$ . Предположим теперь, что стратегия  $S$  есть  $(r, r)$ , значит,  $q = 0.5$ , и значит, (т.к.  $0.5 \leq 2/3$ ) у  $R$  лучший ответ на  $r$  есть  $d$ , давая 0 для  $t_1$  и 1 для  $t_2$ . Но  $t_1$  может получить 1, играя  $l$ , так как лучший ответ  $R$  на  $l$  есть  $u$  для любого значения  $p$ , значит, равновесия с  $(r, r)$  не существует.

(3) Разделяющее с  $t_1$ , играющим  $l$ . Если  $S$  играет  $(l, r)$ , то оба информационных множества — на равновесном пути, следовательно оба представления определены правилом Байеса

и стратегией  $S$ , т.е.  $p = 1$ ,  $q = 0$ . Лучший ответ  $R$  на эти представления есть  $u$  и  $d$  соответственно, так что оба типа  $S$  получают по 1. Остается проверить, является ли эта стратегия  $S$  оптимальной при данной стратегии  $(u, d)$  игрока  $R$ . Но это не так: если  $t_2$  отклонится от  $r$ , играя  $l$ , то  $R$  отвечает  $u$ , поскольку его стратегия —  $(u, d)$ , давая  $t_2$  выигрыш 2, что превосходит выигрыш 1 для  $t_2$  от игры  $r$ .

(4) Разделяющее с  $t_1$ , играющим  $r$ . Если  $S$  играет  $(r, l)$ , то представления  $R$  должны быть  $p = 0$  и  $q = 1$ , так что лучший ответ  $R$  есть  $(u, u)$  и оба типа получают 2. Если бы  $t_1$  отклонился, играя  $l$ , то  $R$  отреагировал бы  $u$ ; выигрыш  $t_1$  тогда был бы 1, значит, нет стимулов для  $t_1$  отклоняться от игры  $r$ . Аналогично, если  $t_2$  отклонился бы, сыграв  $r$ , то поскольку  $R$  играет  $u$ , выигрыш  $t_2$  был бы 1, а значит,  $t_2$  нет смысла отклоняться от игры  $l$ . Значит,  $[(r, l), (u, u), p = 0, q = 1]$  — разделяющее совершенное Байесово равновесие.

П р и м е р ы.

*Модель ограничивающего ценообразования Милгрорма-Робертса* (Milgrom, Roberts, 1982; см. также, например, Тироль, 2000).

Мы приведем несколько упрощенную модель и опишем ее достаточно схематично. Предположим, что есть два периода времени и две фирмы. Фирма 1, укоренившаяся, является монополистом в момент времени 1. Она выбирает цену  $p_1$  своей продукции в первом периоде. Затем фирма 2, новичок, решает вопрос о том, входить в отрасль или нет во втором периоде. Если она входит, то во втором периоде мы имеем ситуацию дуополистической конкуренции, если же нет, то фирма 1 остается монополистом.

Предположим, что затраты фирмы 1 могут быть низкими (с вероятностью  $x$ ) или высокими (с вероятностью  $1 - x$ ). Пусть  $M_1^t(p_1)$  обозначает монопольную прибыль укоренившейся фирмы, если она назначает цену  $p_1$ , причем  $t = L$  или  $H$  в зависимости от того, являются ли затраты фирмы низ-

кими ( $L$ ) или высокими ( $H$ ), то есть

$$M_1^T(p_1) = (p_1 - C_1^T)D_1^m(p_1),$$

где  $D_1^m(\cdot)$  — монопольный спрос. Пусть далее  $p_m^L$  и  $p_m^H$  — монопольные цены, назначаемые укоренившейся фирмой в зависимости от уровня затрат. Хорошо известно, что  $p_m^L < p_m^H$ . Обозначим через  $M_1^L$  и  $M_1^H$  — прибыль монополиста (в зависимости от типа затрат), который максимизирует свою прибыль, то есть  $M_1^t = M_1^t(p_m^t)$ . Будем считать, что  $M_1^t(p_1)$  строго вогнута по  $p_1$ .

Фирма 1 знает свои затраты. Фирма 2 не знает затрат фирмы 1. Следуя Милгрому-Робертсу, считаем, что фирма узнает затраты фирмы 2 после входа, если она решается на вход; считаем также, что дуополистическая конкуренция по цене (после входа, если он происходит) не зависит от цены первого периода. Обозначим через  $D_1^t$  и  $D_2^t$  дуополистические прибыли фирм при условии, что тип первой фирмы —  $t$ . (Можно считать, что  $D_2^t$  включает затраты на вход.)

Будем считать, что решение фирмы 2 относительно входа зависит от представлений относительно затрат фирмы 1 следующим образом:

$$D_2^H > 0 > D_2^L.$$

Таким образом, в условиях симметричной информации фирма 2 вошла бы, если бы затраты первой фирмы были высокими (общий коэффициент дисконтирования есть  $\sigma$ ).

Поскольку фирма 1 предпочитает быть монополистом ( $M_1^t > D_1^t$ ,  $t = L, H$ ), она, конечно же, хочет передать информацию о том, что ее затраты низки. Однако проблема состоит в том, что у нее нет прямого механизма сделать это, даже если у нее действительно низкие затраты. Косвенный способ состоит в сигнализировании путем назначения низкой цены  $p_1^L$ . В нашем примере фирма 1 может захотеть назначить  $p_1^L$ , даже если у нее высокие затраты. Потеря прибыли в первом (монопольном) периоде может быть перекрыта во втором

периоде за счет сохранения своего монопольного положения. Но означает ли это, что назначение цены  $p_1^L$  предотвратит вход? Это, увы, совершенно не очевидно. Рациональный новичок, зная, что в интересах укоренившейся фирмы «обмануть» подобным образом новичка, может не поддаваться на такую уловку. Но укоренившаяся фирма понимает, что новичок знает о соответствующей заинтересованности укоренившейся фирмы обмануть, и т. д.

В такого рода модели есть два типа потенциальных равновесий (не считая третьего случая, когда укоренившаяся фирма использует смешанные стратегии) — разделяющие, когда укоренившаяся фирма назначает различные цены в зависимости от своего типа, и объединяющее, когда цена первого периода не зависит от типа фирмы. В первом случае цена первого периода выявляет затраты новичку. Во втором, напротив, новичок ничего не узнает относительно затрат и его апостериорные представления остаются неизменными (он приписывает вероятность  $x$  низким затратам).

Начнем с разделяющего равновесия. Мы имеем два необходимых условия: тип  $L$  не хочет назначать равновесную цену типа  $H$ , и наоборот. (Затем мы завершим описание равновесия, выбирая представления вне равновесного пути, т. е. для цен, отличающихся от потенциальных равновесных цен, которые будут препятствовать отклонению обоих типов от их равновесных цен.) Ясно, что в разделяющем равновесии цена, назначенная типом  $H$ , индуцирует вход, поэтому укоренившаяся фирма играет  $p_m^H$  и получает прибыль  $M_1^H + \delta D_1^H$  (если он назначает меньшую цену, то он может увеличить свою прибыль в первом периоде без неблагоприятного влияния на вход). Пусть  $p_1^L$  — цена, назначаемая типом  $L$ . Тип  $H$ , назначая эту цену, предотвращает вход и получает  $M_1^H(p_1^L) + \delta M_1^H$ . Таким образом, необходимое условие равновесия есть  $M_1^H + \delta D_1^H \geq M_1^H(p_1^L) + \delta M_1^H$  или

$$M_1^H - M_1^H(p_1^L) \geq \delta(M_1^H - D_1^H). \quad (3.1)$$

Аналогично тип  $L$  максимизирует свою прибыль, выбирая  $p_1^L$ . Поскольку он может назначить свою монопольную цену и получить в худшем случае ( $p_m^1$  в худшем случае индуцирует вход)  $M_1^L + \delta D_1^L$  и поскольку в равновесии он получает  $M_1^L(p_1^L) + \delta M_1^L$  мы должны иметь

$$\begin{aligned} M_1^L + \delta D_1^L &\leq M_1^L(p_1^L) + \delta M_1^L \quad \text{или} \\ M_1^L - M_1^L(p_1^L) &\leq \delta(M_1^L - D_1^L) \end{aligned} \quad (3.2)$$

При некоторых предположениях<sup>3</sup> неравенства (3.1) и (3.2) определяют некоторый интервал  $[\tilde{p}_1, \tilde{p}_1]$  цен  $p_1^L$ , причем  $\tilde{p}_1 < p_m^L$ . Это означает, что для того чтобы «разделять», тип  $L$  должен назначать цену ниже своей монопольной цены, чтобы сделать «объединение», т.е. назначение низкой цены, весьма затратным для типа  $H$ .

Предположения, которые упоминались выше, обеспечиваю-  
ют существование не более одной точки пересечения кривых  $y = M_1^L - M_1^L(p_1^L)$  и  $y = M_1^H - M_1^H(p_1^L)$  (см. рис. 11).

Заметим, что в точке  $\tilde{p}_1$  неравенство (3.1) превращается в равенство, и  $\tilde{p}_1$  называется *разделяющей ценой наименьших затрат*<sup>4</sup>, так как из всех разделяющих цен тип  $L$  предпочел бы цену  $\tilde{p}_1$  (ближайшую к  $p_m^1$ ).

Предположим, что тип  $H$  выбирает  $p_m^H$ , а тип  $L$  — цену  $p_1^L \in [\tilde{p}_1, \tilde{p}_1]$ . Когда наблюдается цена, отличная от этих двух цен, представления произвольны. Простейший способ получить равновесие — выбрать представления, которые индуцируют вход, поэтому будем считать, что если  $p_1 \neq p_m^H$  и  $p_1 \neq p_1^L$ , то апостериорные представления  $x'$  есть 0 (фирма 2 считает, что укореившаяся фирма имеет тип  $H$ ).

Хотя мы получаем тем самым континуум разделяющих равновесий, все-таки «разумным» представляется только одно из них — с разделяющей ценой наименьших затрат.

<sup>3</sup> В частности,  $\frac{\partial[M_1^H(p_1) - M_1^L(p_1)]}{\partial p_1} > 0$  и  $M_1^H - M_1^H(p_m^L) < \delta(M_1^H - D_1^H)$ .

<sup>4</sup> Least-cost separating price.

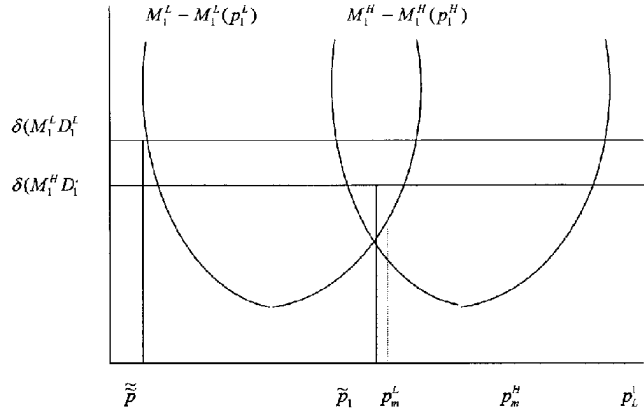


Рис. 11.

Таким образом, подводя итоги нашего достаточно краткого анализа разделяющего равновесия, заметим следующее: существует единственное «разумное» равновесие, при этом тип  $H$  назначает свою монопольную цену и «разрешает» вход, тип  $L$  назначает наибольшую цену  $\tilde{p}_1$ .

Обратимся теперь к объединяющему равновесию. Его существование зависит от выполнения условия

$$xD_2^L + (1-x)D_2^H < 0. \quad (3.3)$$

Предположим, что это условие не выполнено<sup>5</sup>. Тогда при объединяющей цене фирма 2 получает строго положительную прибыль, если входит. Это означает, что вход не предотвращен, стало быть, оба типа не могут сделать ничего лучшего, нежели назначить свои монопольные цены. Так как эти цены различны, то объединяющего равновесия не существует.

Следовательно, предположим, что (3.3) имеет место, так что объединяющаяся цена  $p_1$  сдерживает вход. Необходимое условие того, что цена  $p_1$  является ценой объединяющего рав-

<sup>5</sup> Для простоты будем считать, что имеет место строгое неравенство.

новесия, состоит в том, что ни один из типов не хочет назначать свою монопольную цену.

Если бы один из них сделал бы это, то это, в худшем случае, допустило бы вход. Значит,  $p_1$  должна удовлетворять условию (3.2) и аналогичному условию для типа  $H$ :

$$M_1^H - M_1^H(p_1) \leq \delta(M_1^H - D_1^H). \quad (3.4)$$

Если выполнено условие

$$M_1^H - M_1^H(p_m^L) < \delta(M_1^H - D_1^H)$$

(см. также сноску 5 выше), то существует интервал цен «вокруг»  $p_m^1$ , удовлетворяющих обоим неравенствам.

Можно показать, что если  $p_1$  удовлетворяет условиям (3.2) и (3.4), то  $p_1$  может быть частью объединяющего равновесия. Предположим, что как только фирма 1 назначает цену, отличную от  $p_1$  (цена вне равновесного пути), то фирма 2 считает, что фирма 1 имеет тип  $H$ . Тогда фирма 2 входит, а фирма 1 может назначить монопольную цену. Таким образом, из условий (3.2) и (3.3) следует, что ни один из типов не будет отклоняться.

*Модель Спенса (Spence, 1974).*

Спенс предложил следующую модель выбора уровня образования. Первый игрок  $S$  (работник) выбирает уровень образования  $a_1 \geq 0$ . Его затраты на инвестирование  $a_1$  единиц в образование есть  $a_1/Q$ , где  $Q$  — его тип «способностей». Производительность работника в фирме равна  $Q$  (для простоты не зависит от уровня образования). Второй игрок  $R$  (фирма) старается минимизировать квадрат разности между ставкой заработной платы  $a_2$ , предлагаемой работнику (в зависимости от его производительности), и его производительностью. Игрок 2 предлагает ожидаемую производительность  $a_1(a_2) = E(Q|a_1)$ . Функция выигрыша работника есть  $a_2 - a_1/Q$ .  $S$  может иметь один из двух возможных типов  $Q'$

или  $Q''$ , причем  $0 < Q' < Q''$ ; вероятности этих типов —  $p'$  и  $p''$  соответственно.  $S$  знает свой тип, но  $R$  — нет.

Пусть  $\sigma'_1$  и  $\sigma''_1$  обозначают равновесные стратегии типов  $Q'$  и  $Q''$ . Заметим, что если  $a'_1 \in \text{supp}\sigma'_1$  и  $a''_1 \in \text{supp}\sigma''_1$  (где  $\text{supp}\sigma_1$  — носитель стратегии  $\sigma_1$ , т.е. множество тех чистых стратегий, которые играют с положительными вероятностями), то  $a'_1 \leq a''_1$ . В самом деле, в равновесии

$$\begin{aligned} a_2(a'_1) - a'_1/Q' &\geq a_2(a''_1) - a''_1/Q' \quad \text{и} \\ a_2(a''_1) - a''_1/Q'' &\geq a_2(a'_1) - a'_1/Q'. \end{aligned}$$

Складывая эти два неравенства, получаем

$$(1/Q' - 1/Q'')(a''_1 - a'_1) \geq 0 \quad \text{или} \quad a'_1 \leq a''_1.$$

В разделяющем равновесии низкопроизводительный работник выявляет свой тип и получает зарплату  $Q'$ . Он поэтому должен выбрать  $a'_1 = 0$ ; если бы он поступил иначе, то смог бы выиграть, выбрав  $a'_1 = 0$ , поскольку он бы сэкономил на затратах на образование и получил бы зарплату, являющуюся необходимо выпуклой комбинацией  $Q'$  и  $Q''$  и поэтому, как минимум, равную  $Q'$ .

Пусть  $a''_1 > 0$  означает равновесное действие типа  $Q''$  (заметим, что в разделяющем равновесии тип  $Q''$  не может играть смешанную стратегию, поскольку все его равновесные действия приносят зарплату  $Q''$ , и поэтому тип  $Q''$  предпочитает самый низкий уровень образования). Для того чтобы  $(a'_1 = 0, a''_1)$  было частью разделяющего равновесия, тип  $Q'$  не должен предпочитать  $a''_1$  (в сравнении с  $a'_1$ ):

$$\begin{aligned} Q' &\geq Q'' - a''_1/Q' \quad \text{или} \\ a''_1 &\geq Q'(Q'' - Q') \end{aligned} \tag{3.5}$$

Аналогично тип  $Q''$  не может предпочитать  $a'_1$  (в сравнении с  $a''_1$ ):

$$a'_1 \leq Q''(Q'' - Q') \tag{3.6}$$

Следовательно,  $Q'(Q'' - Q') \leq a_1'' \leq Q''(Q'' - Q')$ .

Обратно, предположим теперь, что  $a_1''$  лежит в этом интервале.

Рассмотрим представления

$$\{\mu(Q'|a_1) = 1, \text{ если } a_1 \neq a_1'', \mu(Q'|a_1'') = 0\}.$$

Ясно, что оба типа предпочитают  $a_1 = 0$  любому  $a_1 \notin \{0, a_1''\}$ , поскольку любой такой  $a_1$  дает зарплату  $Q'$ . Поскольку для  $Q'$  0 предпочтительнее  $a_1''$  (см. (3.5)), а для  $Q''$   $a_1''$  предпочтительнее 0 (см. (3.6)), то мы имеем континуум разделяющих равновесий. Этот континуум иллюстрирует, как определение представлений вне равновесного пути приводит к множественности равновесий. Мы использовали «пессимистичное» представление, согласно которому любой сигнал, кроме  $a_1''$ , убеждает  $R$  в том, что  $S$  имеет тип  $Q'$ . Однако разделяющие равновесия могут основываться на менее экстремальных апостериорных представлениях. В частности, мы можем считать, что  $\mu(Q'|a_1) = 0$  для всех  $a_1 \geq a_1''$ .

Интересно отметить, что из этого континуума разделяющих равновесий все, кроме одного с наименьшими затратами, когда  $a_1'' = Q'(Q'' - Q') \equiv a_1^*$ , могут быть исключены по следующим соображениям.

Независимо от того, какой уровень образования выбирает  $S$ , игрок  $R$  никогда не выбирает уровень зарплаты вне интервала  $[Q', Q'']$ . Когда игрок  $S$  осознает это, то тип  $Q'$  никогда не выберет  $a' > a_1^*$ . Когда игрок  $R$  осознает, что это так, то он должен отвечать на  $a_1 > a_1^*$  зарплатой  $Q''$ ; в этом случае тип  $Q''$  никогда не выберет  $a_1 > a_1^*$ .

В объединяющем равновесии оба типа выбирают одно и то же действие  $\tilde{a}_1 = a_1' = a_1''$ . Зарплата в этом случае есть

$$a_2(\tilde{a}_1) = p'Q' + p''Q''.$$

Простейший способ «поддержать»  $\tilde{a}$  как объединяющий исход — это формирование пессимистичного представления  $\mu(Q'|a_1) = 1$  для любого  $a_1 \neq \tilde{a}_1$ , так как это минимизирует

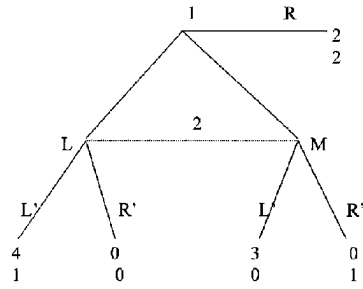
(для обоих типов) соблазн отклониться. Поэтому  $\tilde{a}_1$  является уровнем образования объединяющего равновесия тогда и только тогда, когда для любого  $Q$

$$Q' \leq p' Q' + p'' Q'' - \tilde{a}_1 / Q.$$

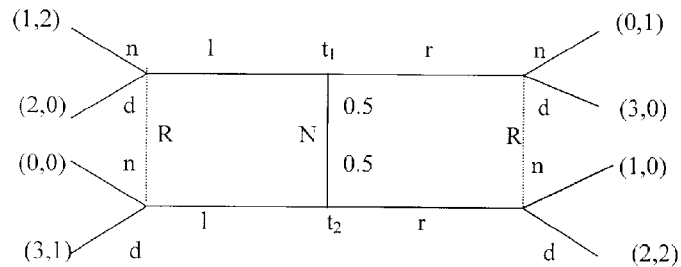
Так как  $Q' < Q''$ ,  $Q'$  наиболее склонен отклониться к  $a_1 = 0$ , минимизировать затраты на образование и связывающее ограничение есть  $\tilde{a}_1 \leq p'' Q' (Q'' - Q')$ , то существует также континуум объединяющих равновесий.

#### 4.4. Задачи

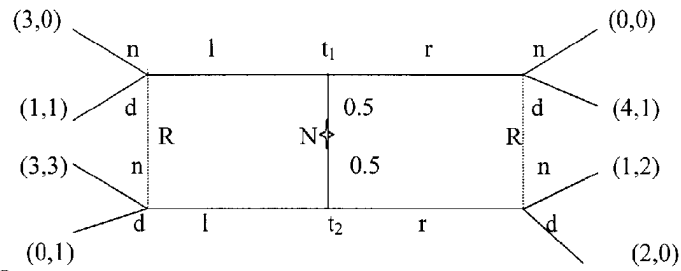
1. Для следующей игры укажите нормальную форму игры, все равновесия по Нэшу, совершенные под-игровые и совершенные Байесовы равновесия (в чистых стратегиях):



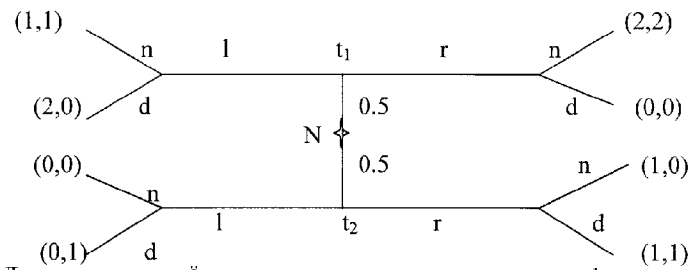
2. Укажите объединяющее Байесово равновесие, в котором оба типа Sender'a играют  $r$  в следующей сигнальной игре:



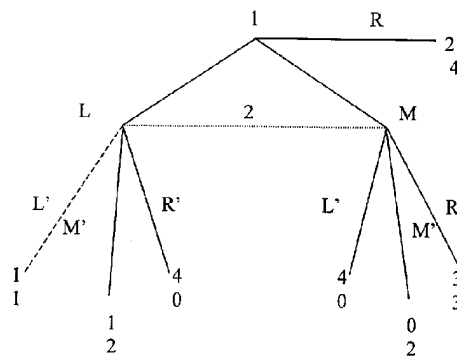
3. Опишите все объединяющие и разделяющие совершенные Байесовы равновесия (в чистых стратегиях) в следующей сигнальной игре:



4. Опишите все объединяющие и разделяющие совершенные Байесовы равновесия (в чистых стратегиях) в следующей сигнальной игре:



5. Для следующей игры укажите нормальную форму игры, все равновесия по Нэшу, совершенные под-игровые и совершенные Байесовы равновесия (в чистых стратегиях):



## Глава 5.

# Элементы эволюционной теории игр

### 5.1. Обучение и эволюция

В этой главе мы очень кратко коснемся того направления развития теории игр, которое касается моделей обучения и эволюции. Большая часть бескоалиционной теории игр фокусируется на равновесии в играх и, в первую очередь, на равновесии по Нэшу и его уточнениях типа совершенного равновесия. Это, собственно, порождает вопрос о том, когда и почему мы можем надеяться на то, что наблюдаемое поведение в игре будет соответствовать одному из таких равновесий. Достаточно традиционное объяснение возникновения равновесия состоит в том, что оно является результатом анализа и самоанализа игроками в ситуации, когда правила игры, рациональность игроков, функции выигрышей игроков общеизвестны. Разумеется, и концептуально, и эмпирически здесь возникает целый ряд проблем. Во-первых, основная концептуальная проблема возникает в случае множественности равновесий, так как в отсутствие объяснения того, каким образом игроки приходят к

одному и тому же равновесию, действия игроков вообще могут не соответствовать никакому равновесию. Во-вторых, крайне сомнительно, чтобы гипотеза общеизвестности выигрышей и рациональности была применима к многим играм, а ослабление этого условия, даже до «почти» общеизвестности, приводит уже к значительно более слабым заключениям. Наконец, теория равновесия очень плохо объясняет игру на ранних этапах большинства экспериментов, хотя значительно лучше работает в более поздних раундах (подробнее см., например, Fudenberg, Levine, 1998).

Исследование ограниченно рационального процесса приспособления к равновесию по Нэшу стало полем активных исследований последних лет. Появляющуюся литературу можно весьма условно разделить на две категории: обучение и эволюцию. В литературе по *обучению* обычно предполагается, что игроки могут вычислить наилучший ответ и проверить, как игроки совершенствуют свои представления о стратегиях своих оппонентов в фиксированном «матче». Напротив, *эволюционный* подход не предполагает обязательную способность оптимизировать и анализирует эволюцию поведения через пробы и ошибки и естественный отбор в *популяции* игроков.

Как мы уже отмечали, хотя равновесный анализ доминирует в исследованиях стратегических игр, очень многих не удовлетворяет и беспокоит предположение о том, что игроки немедленно и безошибочно идентифицируют и играют определенный набор равновесных стратегий. Изучение процесса обучения является альтернативным и в некотором смысле дополняющим подходом к анализу поведения в играх. Типичный анализ рассматривает игру, разыгрываемую «повторно» (неоднократно), и постулирует некоторые специфические правила, в соответствии с которыми игроки формируют ожидания, касающиеся того, каким будет текущий выбор игроков как функция предыдущих розыгрышей. Далее предполагается, что игроки пытаются максимизировать свои текущие

выигрыши при данных ожиданиях; это определяет динамический процесс, порождающий последовательность розыгрышей, и анализ концентрируется на изучении поведения этой последовательности. Сходится ли такая последовательность розыгрышей? Если да, то приводит ли этот подход к поведению, предсказываемому равновесным анализом?

Этот подход столь же почтенен, как и сам равновесный анализ: исследование Курно дуополии (Cournot, 1838), по существу, «явило миру» и равновесие по Нэшу, и специфический процесс обучения (см. раздел 1.9). Курно исходил из того, что в каждом «раунде» каждая фирма выбирает объемы производства, которые максимизируют ее прибыль в предположении («гипотеза Курно»), что конкурент продолжает выпускать тот же объем продукции, что и в предыдущем раунде. Называемая теперь «динамикой лучшего ответа», эта динамика до сих пор привлекает внимание как одна из моделей обучения в играх (Bernheim, 1984; Moulin, 1986). В то же время представляется неразумным предполагать, что реальные фирмы будут вести себя таким специфическим образом, как это описано у Курно. Это относится к ситуации, когда динамика лучшего ответа приводит к несходящемуся, циклическому поведению, что может случиться при некоторых специфических функциях затрат и спроса.

Циклы — это не единственная проблема, возникающая в моделях обучения. Например, Фуденберг и Крепс показали, что модели типа стационарного Байесова обучения, в соответствии с которым игроки анализируют прошлые наблюдения, как если бы поведение их конкурентов было стационарным, порождают такую последовательность, которая может сходиться, но к набору стратегий, отличному от любого совершенного равновесия (Fudenberg, Kreps, 1988).

В действительности «рациональность» каждого процесса обучения ситуативна: алгоритм, ведущий себя хорошо в некоторых ситуациях, может в других ситуациях работать скверно. Другим важным аспектом существующих моделей обуче-

ния является то, что они, по сути дела, «вынуждают» игроков не быть «искушенными», то есть игроки могут использовать только информацию о прошлой игре, не придавая никакого значения информации относительно информации конкурентов, выигрышей, рациональности. Подход, основанный на равновесии по Нэшу или рационализуемости, напротив, придает значение только информации о выигрышах. Реальные же игроки часто используют оба типа информации.

Обратимся к играм двух лиц. Естественной точкой отсчета можно считать двух игроков, разыгрывающих игру повторяющимся образом и пытающихся предсказать игру соперника, исходя из предшествующей игры. Такую модель можно назвать моделью с фиксированными игроками (мы следуем здесь Fudenberg, Levine, 1998). В подобного рода ситуации игроки должны рассматривать не только то, каким образом будет играть в будущем оппонент, но также возможность того, что их собственная игра будет влиять на будущую игру оппонента. Например, игроки могут думать, что если они «ведут себя хорошо», то будут вознаграждены «хорошим поведением» оппонентов в будущем, или что они могут «научить» своих оппонентов играть лучший ответ на определенное действие, разыгрывая его снова и снова.

Рассмотрим следующую игру (рис. 1.):

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ d \end{array} & \left( \begin{array}{cc} (1, 0) & (3, 2) \\ (2, 1) & (4, 0) \end{array} \right) \end{array}$$

Рис. 1.

Практически во всех моделях обучения игрок 1, игнорирующий повторяющееся разыгрывание, будет играть  $d$ , поскольку  $d$  — доминирующая стратегия, а потому максимизирует текущий ожидаемый выигрыш первого игрока при любых представлениях относительно оппонентов. Если, а это представляется правдоподобным, игрок 2 в конце концов

«выучит», что игрок 1 играет  $d$ , то система сойдется к  $(d, L)$ , причем выигрыш игрока 1 будет 2. Но если игрок 1 терпелив и знает, что второй «наивно» выбирает в каждом периоде ход, максимизирующий выигрыш в этом периоде при условии прогнозирования вторым игроком хода первого игрока, то игрок 1 может добиться большего, всегда играя  $u$ , что в конце концов «вынудит» второго играть  $R$ , давая первому игроку 3.

Теория обучения, как правило, абстрагируется от такого рода рассмотрений, экплицитно или имплицитно опираясь на модель, в которой стимул к попытке изменить будущую игру оппонентов слишком мал. Один класс моделей этого типа — это тот, в котором игроки ограничены в своем выборе<sup>1</sup>, а дисконтирующие множители малы в сравнении с максимальной скоростью, с которой система может приспосабливаться. Вторым класс моделей — это модели с большим числом игроков, взаимодействующих относительно анонимно, причем размер популяции (игроков) велик по сравнению с множителем дисконтирования.

Мы можем погрузить игру двух (или  $n$ ) лиц в такую «обстановку», уточняя механизм, в соответствии с которым пары игроков из популяции выбираются для разыгрывания этой игры. Здесь есть целый ряд моделей.

*Модель с одной парой.* В каждом периоде одна пара игроков выбирается случайным образом для разыгрывания игры. В конце раунда ходы игроков становятся известными всем. Здесь, если популяция велика, то, скорее всего, игроки, играющие сегодня, долгое время будут оставаться неактивными. Даже для терпеливых игроков не будет целесообразным жертвовать текущим выигрышем, чтобы повлиять на будущую игру оппонентов, если размер популяции достаточно велик в сравнении с дисконтирующим множителем.

---

<sup>1</sup>Пример этого — процесс нащупывания Курно (см. раздел 1.9), когда фирмы ограничены условием дважды подряд (на своем, а затем на чужом шаге) сохранять объем выпуска неизменным.

*Совокупная статистическая модель.* В каждом периоде все игроки случайным образом разбиваются на пары. В конце раунда объявляется совокупный выигрыш популяции. Если популяция велика, каждый игрок незначительно влияет на выигрыш популяции, а следовательно, мало влияет на будущую игру. Игрокам нет смысла отклоняться от близорукого поведения.

*Модель случайного выбора пар.* В каждом периоде все игроки случайным образом разбиваются на пары. В конце раунда каждый игрок наблюдает только исход своего собственного матча. То, как игрок играет сегодня, будет влиять на то, как его оппонент будет играть завтра, но маловероятно, чтобы игрок снова попал в пару к своему текущему оппоненту или кому-то, кто играл с текущим оппонентом. Снова близорукая игра «почти» оптимальна в конечной, но большей по сравнению с дисконтирующим множителем, популяции. Этот подход наиболее часто используется в теоретико-игровых экспериментах.

С технической точки зрения есть два типа обычно используемых моделей больших популяций — конечные популяции и континуальные популяции. Важный модельный момент связан с тем, каким образом популяции, из которых выбираются игроки, соотносятся с числом «игровых ролей» в игре. Можно различать *агента* в игре, соответствующего определенной роли игрока, и действительного игрока, принимающего на себя роль агента в конкретном матче. Если игра симметрична, то можно считать, что есть одна популяция, из которой выбираются два агента. В этом случае говорят об однородной популяции. С другой стороны, мы можем считать, что каждый агент выбирается из отдельной популяции. В этом случае говорят об асимметричной популяции.

В симметричной игре, в дополнение к крайним случаям однородных и неоднородных популяций, можно также рассматривать смесь этих двух случаев, когда каждый игрок имеет какие-то шансы встретиться в матче с оппонентом из другой

популяции и какие-то шансы — с оппонентом из той же популяции.

Мы остановимся сейчас (весьма кратко) на одном специфическом процессе динамического приспособления — так называемом фиктивном разыгрывании, полностью основанном на идее обучения, а затем перейдем к модели, основанной на идее эволюции.

В процессе фиктивного разыгрывания агенты ведут себя так, как будто они считают, что они сталкиваются со стационарным, но неизвестным распределением на множестве стратегий агентов.

Итак, предположим, что мы имеем бескоалиционную игру  $\{\{1, 2\}, \{S_1, S_2\}, \{u_1, u_2\}\}$ . Модель фиктивного разыгрывания предполагает, что игроки выбирают свои ходы в каждом периоде из условия максимизации ожидаемого выигрыша в этом периоде при данной их оценке распределения действий оппонента в этом периоде, причем эта оценка имеет следующий специальный вид: у игрока  $i$  есть экзогенно заданная начальная функция весов  $k_0^i : S_{-i} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Эти веса модифицируются путем добавления 1 каждой стратегии оппонента каждый раз, как только эта стратегия играется, то есть

$$k_t^i(s_{-i}) = k_{t-1}^i(s_{-i}) + \begin{cases} 1, & \text{если } s_{-i}^{t-1} = s_{-i}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вероятность того, что игрок  $i$  предсказывает оппоненту игру  $s_{-i}$  в момент  $t$ , есть

$$\gamma_t^i(s_{-i}) = \frac{k_t^i(s_{-i})}{\sum_{\tilde{s}_{-i} \in S_{-i}} k_t^i(\tilde{s}_{-i})}.$$

Фиктивное разыгрывание — это правило  $\rho_t^i(\gamma_t^i)$ , так что  $\rho_t^i(\gamma_t^i) \in BR(\gamma_t^i)$  (здесь  $BR$  — best response). Важно заметить, что такое правило может быть не единственным, поскольку может существовать более одного лучшего ответа на каждую оценку.

Ключевой вопрос, возникающий здесь, состоит в том, сходится ли такой процесс.

Состояние процесса фиктивного разыгрывания есть вектор оценок игроков, а не стратегии, играемые в период  $t$ , поскольку их хватает для определения будущей эволюции системы. Тем не менее, несколько пренебрегая формальностями терминологии, будем говорить, что набор стратегий является устойчивым состоянием, если он играется в каждом периоде начиная с некоторого конечного момента времени  $T$ .

**Предложение 5.1.1.** (Fudenberg, Kreps, 1990). 1) Если  $s$  — строгое равновесие по Нэшу<sup>2</sup> и  $s$  играется в момент  $t$  в процессе фиктивного разыгрывания, то  $s$  будет играть далее всегда. 2) Любое устойчивое состояние фиктивного разыгрывания в чистых стратегиях должно быть равновесием по Нэшу.

Упомянем здесь еще один вариант фиктивного разыгрывания. Милгром и Робертс (Milgrom, Roberts, 1991) рассматривают *адаптивное* обучение. Прогноз (относительно выбора стратегий оппонентом) называется адаптивным, если этот прогноз приписывает очень малую вероятность любой стратегии оппонента, которая не игралась длительное время. Формально прогноз адаптивен, если для любого  $\varepsilon > 0$  и любого  $t$  существует  $T(\varepsilon, t)$  такой, что для любого  $t' > T(\varepsilon, t)$  и любой истории до момента  $t'$ , прогноз  $\gamma_t^i$  приписывает вероятность не больше  $\varepsilon$  множеству чистых стратегий оппонента игрока  $i$ , которые не игрались между моментами  $t$  и  $t'$ . Для адаптивного прогноза сохраняется второе утверждение предложения 5.1: если прогнозы адаптивны и разыгрывание сходится к набору чистых стратегий, то этот набор должен быть равновесием по Нэшу.

---

<sup>2</sup>Равновесие по Нэшу называется строгим, если для каждого игрока  $i$ ,  $s_i$  является единственным лучшим ответом на  $s_{-i}$ . Заметим, что строгое равновесие может быть только равновесием в чистых стратегиях, т. к. если смешанная стратегия является лучшим ответом, то таковой же является и любая чистая из носителя смешанной стратегии.

Перейдем теперь от моделей, базирующихся на обучении к моделям, связанным с идеей эволюции.

Основная идея *эволюционного подхода* состоит в том, что агенты могут не оптимизировать сознательно, но вести себя так, *как если бы* они были рациональны, поскольку (экономическая) конкуренция отберет оптимизирующих агентов.

Существенным толчком к исследованию таких процессов послужила биология. Мейнард Смит и Прайс (Maynard Smith, Price, 1973) ввели понятие эволюционно устойчивой стратегии и пришли к выводу о том, что наблюдаемые черты поведения животных и растений можно объяснить с помощью равновесия по Нэшу в соответствующим образом определенной игре. Идея состоит в том, что комбинация естественного отбора и мутации приводит популяцию к эволюционно устойчивому состоянию в длительном периоде. Эта точка зрения была подтверждена многочисленными полевыми исследованиями. Здесь «как если бы» — это вполне реальное описание действительности. Вдохновленные успехом биологии, многие экономисты включились в активные исследования эволюционной теории игр. Почему же эволюционная теория привлекает такое внимание?

Только после глубоких и длительных исследований теория игр прояснила, что значит рациональность в стратегических ситуациях и каковы ее последствия. Рациональность сама по себе не оправдывает равновесие по Нэшу, и нужно искать что-то другое, что объясняло бы равновесное поведение.

Кроме того, необходимость равновесного отбора, которая стала доминирующей темой в многочисленных приложениях теории игр к многообразию конкретных задач, это то, чего предшествующая литература по динамике приспособления не учитывала.

## 5.2. Эволюционно устойчивые стратегии

Как мы уже отмечали и во введении, и в предыдущем разделе, эволюционная теория игр представляется чрезвычайно привлекательным подходом к обучению. В типичной для эволюционной теории игр модели есть популяция агентов, выигрыш каждого из которых является функцией не только его поведения, но и того, как ведут себя агенты, с которыми он взаимодействует. В каждый момент времени поведение в популяции распределено в соответствии с различными стратегиями, или типами поведения. Если популяция конечна, то состояние (популяции) представляет собой описание того, какие агенты какое поведение выбирают. Если популяция бесконечна, то состояние — это описание долей популяции, которые играют каждую стратегию. Если игрок может максимизировать и знает состояние, то он может выбрать лучший ответ. Если он не знает состояния популяции, тогда он должен сделать заключение о состоянии, исходя из информации, которой он обладает. Кроме того, даже зная состояние, игрок может и не иметь возможности вычислить лучший ответ. Вычисление лучшего ответа требует, чтобы игрок знал *все* доступные стратегии и соответствующие выигрыши. Наблюдаемая история игры становится важной по двум причинам.

Во-первых, история передает информацию о том, каковы ожидания относительно игры оппонентов. Во-вторых, наблюдаемый успех или неудача выбора различных действий помогает игрокам определить, что может быть хорошей стратегией в будущем. Имитация часто является важной частью обучения: успешному поведению будут учиться. До той степени, до которой игроки имитируют успешное поведение и не вычисляют явно лучшие ответы, у игроков нет необходимости различать знания, получаемые от разыгрывания игры, и знания того, как играют оппоненты. Игроки должны только знать, *что* было успешным, а не *почему* оно было успешным.

Важным моментом является то, что эволюционная динамика ни в каком аспекте не опирается на какие-либо предположения о поведении или знания, отличные от базового принципа дифференцированного отбора, — явное успешное поведение должно «увеличивать свое представительство» в популяции, в то время как неуспешное — нет.

Существенным аспектом эволюционной динамики является то, что (в больших популяциях) если она имеет тенденцию сходиться, то она сходится к равновесию по Нэшу. Это свойство является необходимым условием для любой осмысленной модели социального обучения. Предположим, что у нас есть модель, в которой поведение «сходится» к чему-то, что не является равновесием по Нэшу. Поскольку обстановка в конечном счете становится стационарной и есть стратегия (тип поведения), доступная какому-либо агенту, дающая ему больший выигрыш, то в конце концов этот агент отклонится.

Понятие равновесия, наиболее часто используемое в эволюционной теории игр, как уже отмечалось выше, было введено Мейнардом Смитом и Прайсом и впервые достаточно подробно изложено в книге Мейнарда Смита «Эволюция и теория игр» (Maynard Smith, 1982). Мейнард Смит исследовал поведение фенотипов (фенотип — совокупность всех признаков и свойств организма, сформировавшихся в результате его индивидуального развития). В частности, он изучал фенотип в популяциях, которые эволюционно устойчивы в том смысле, что они не могут быть «побеждены» («захвачены») другим фенотипом. Здесь «победа» означает, что какой-то другой тип поведения оказывается более успешным и агенты применяют его. Поскольку «тип поведения» переводится в теоретико-игровых терминах термином «стратегия», то речь, по сути дела, идет об эволюционно устойчивых стратегиях<sup>3</sup>.

Основная идея, лежащая в основе этого понятия, состоит в том, что эволюционно устойчивая стратегия (ЭУС) — это стратегия, которая, будучи используемой в некоторой популя-

---

<sup>3</sup>Evolutionary stable strategies — ESS.

ции, не может быть «побеждена» другой стратегией, поскольку она не может быть улучшена. Так, если популяция использует стратегию  $x$ , то «мутанты», использующие какую-то другую стратегию  $y$ , не могут распространиться в популяции.

Будем обозначать набор возможных стратегий (типов поведения) через  $S$ , а выигрыш агента, выбирающего стратегию  $x \in S$ , в случае если его противник выбирает стратегию  $y$ , через  $u(x, y)$ . Предполагаем, что множество  $S$  — конечно. Любая стратегия из  $S$  называется чистой. Смешанная стратегия — это вероятностное распределение на множестве чистых стратегий. (Мы считаем, говоря о смешанных стратегиях, что в них с положительной вероятностью используются как минимум две чистые стратегии.) Смешанные стратегии имеют две возможные интерпретации: либо популяция *мономорфна*, и в ней каждый член играет одну и ту же смешанную стратегию, либо популяция *полиморфна*, и в ней каждый участник играет некую чистую стратегию, причем доля популяции, играющая каждую чистую стратегию, равна вероятности, приписываемой этой чистой стратегии смешанной стратегией.

Смысл ключевого понятия эволюционной теории игр — эволюционно устойчивой стратегии — состоит в следующем. Предположим, что индивиды (агенты) повторяющимся образом выбираются случайно из большой популяции, чтобы разыграть симметричную игру двух лиц (то есть игру  $\Gamma = \{\{1, 2\}, \Delta, \{u_i, i = 1, 2\}\}$ , где  $\Delta$  — множество стратегий и первого и второго игрока, причем  $u_1(x, y) = u(x, y)$  и  $u_2(x, y) = u(y, x)$  для некоторой (непрерывной) функции  $u$ , и предположим, что первоначально все индивиды «генетически запрограммированы» играть определенную чистую или смешанную стратегию. Теперь «добавим» некоторую малую долю популяции, которая запрограммирована играть некоторую другую чистую или смешанную стратегию. «Укоренившаяся» стратегия называется эволюционно устойчивой, если для любой такой «мутантной» стратегии существует такой положительный «барьер вторжения», что если доля популяции

индивидов, играющих «мутантную» стратегию, падает ниже этого барьера, то «укоренившаяся» стратегия дает больший выигрыш, чем «мутантная» стратегия.

Такой подход фокусируется на симметричных попарных взаимодействиях в некоторой популяции. В частности, он не сосредоточивается на взаимодействии более чем двух индивидов в момент времени. Кроме того, критерий эволюционной устойчивости опирается на тесную связь между выигрышами в игре и «степени распространенности» стратегии в популяции.

Какова же роль величины популяции? Здесь есть два элемента: один «механический», а другой — «стратегический». Во-первых, чтобы говорить о барьере вторжения (выражаемом в долях популяции), нужно, чтобы такой барьер превосходил  $1/n$ , где  $n$  — численность популяции. Во-вторых, популяция должна быть столь велика, чтобы возможный эффект от текущего индивидуального воздействия на дальнейшие действия остальных был бы пренебрежим.

Помимо биологического аспекта эволюционная устойчивость дает надежный критерий поведения людей в широком спектре ситуаций, включая многочисленные взаимодействия в области экономики. В социальной или экономической обстановке эволюционная устойчивость требует, чтобы малые группы индивидов, которые пытаются использовать другую стратегию, преуспевали меньше, чем те индивиды, которые используют «*status quo*» стратегию. Следовательно, те индивиды, которые используют превалирующие стратегии, не стремятся их менять, поскольку их положение лучше, чем у «экспериментаторов», а экспериментаторы стремятся вернуться к «укоренившимся» стратегиям.

Итак, предположим, что небольшая группа мутантов появилась в большой популяции индивидов, каждый из которых запрограммирован играть некоторую, одну и ту же, «укоренившуюся» стратегию  $x \in \Delta$  (чистую или смешанную). Предположим, что все мутанты запрограммированы играть неко-

торую другую (чистую или смешанную) «мутантную» стратегию  $y \in \Delta$ . Пусть доля мутантов в «пост-входной» популяции есть  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Пары индивидов в этой биморфной (представлены две стратегии) популяции выбираются (повторяющимся образом) случайно, чтобы разыгрывать игру, причем все индивиды выбираются равновероятно. Следовательно, если некоторый индивид выбран разыграть игру, то вероятность того, что его оппонент будет играть «мутантную» стратегию  $y$ , есть  $\varepsilon$ , а вероятность того, что будет играть «укоренившуюся» стратегию, есть  $1 - \varepsilon$ . Выигрыш в матче (схватке) в такой биморфной популяции совпадает с выигрышем в матче с индивидом, играющим смешанную стратегию

$$w = \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x \in \Delta.$$

Таким образом, «пост-входной» выигрыш для «укоренившейся» стратегии будет  $u(x, w)$ , а для «мутантной» стратегии —  $u(y, w)$  ( $u$  — непрерывная функция выигрышей). Повидимому, интуитивно ясно, что «сила эволюции» выступает против «мутантной» стратегии тогда и только тогда, когда «пост-входной» выигрыш меньше, нежели выигрыш «укоренившейся» стратегии, то есть

$$u(x, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x) > u(y, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x). \quad (2.1)$$

Стратегия  $x \in \Delta$  эволюционно устойчива, если это неравенство выполнено для любой «мутантной» стратегии  $y \neq x$ , при условии, что популяция мутантов достаточно мала.

**Определение 5.2.1.** Стратегия  $x \in \Delta$  называется эволюционно устойчивой, если для любой стратегии  $y \neq x$  существует такой  $\overline{\varepsilon}_y \in (0, 1)$ , что неравенство (2.1) выполнено для любого  $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}_y)$ .

Достаточно просто проверить, что ЭУС оптимальна против себя самой: если  $x$  не оптимальна против себя самой,

то существует некоторая стратегия  $y$ , дающая больший выигрыш против  $x$ . Следовательно, если доля  $\varepsilon$  такой «мутантной» стратегии достаточно мала, то, по непрерывности  $u$ , она даст больше против смеси  $w = \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x$ , нежели  $x$ , а значит,  $x$  — не ЭУС.

Приведенное выше определение можно переформулировать следующим образом.

**Определение 5.2.1\***  $x \in \Delta$  называется эволюционно устойчивой, если  $(x, x)$  является равновесием по Нэшу игры  $\Gamma$  и  $u(y, y) < u(x, y)$  для любого наилучшего ответа  $y$  на  $x$  ( $y \neq x$ ).

**Пример.** Рассмотрим следующую игру, которую можно интерпретировать по-разному. Ее (или ее модификации) иногда называют игрой «цыплята», или «ястреб-голубь».

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} Я \\ Г \end{array} \\ \begin{array}{c} Я \\ Г \end{array} & \begin{pmatrix} (-2, -2) & (2, 0) \\ (0, 2) & (1, 1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Одна из интерпретаций «цыплят» такова. Навстречу друг другу на машинах мчатся «храбрецы». Если никто не сворачивает (оба ведут себя как ястребы), то печальный исход приводит, как минимум, к серьезным травмам. Если оба сворачивают (голуби), то, хотя это не столь эффектно, но, по крайней мере, оба живы и здоровы. Наконец, если только один сворачивает, то он — проигравший (но здоров), а другой — победитель, который «получает все».

Другая интерпретация состоит в следующем. Идет борьба, скажем, за наследство, оцениваемое в 2 единицы. Если никто не хочет уступать (оба ястреба), то борьба связана с серьезными затратами, например, судебными издержками. Если претенденты договариваются (оба голуби), то они делят наследство пополам. Наконец, если один уступает, то второй «получает все».

В этой игре три равновесия по Нэшу —  $(я, г)$ ,  $(г, я)$  и смешанное равновесие, когда «я» играется с вероятностью  $1/3$ .

Чтобы посмотреть на ЭУС, предположим, что агенты из некоторой популяции случайным образом взаимодействуют друг с другом. Предположим, что агенты не знают, какую стратегию использовать. Они просто начинают использовать какую-то стратегию или вероятностную смесь этих стратегий, и они приспособливают свои стратегии, используя процесс обучения методом проб и ошибок. Есть два способа ввести процесс обучения. Либо мы можем представить себе, что некоторая часть  $p$  ( $0 < p < 1$ ) популяции использует стратегию «я», а другая  $1-p$  использует «г», и предположить, что агенты переключаются с одной стратегии на другую в зависимости от результата использования той или иной стратегии. Второй вариант — мы можем предположить, что каждый индивид использует смешанную стратегию и приспособливает вероятностную смесь на основе своего опыта использования каждой чистой стратегии (то есть увеличивает  $p$ , если «я» дает бóльшую отдачу, и наоборот).

Разумеется, такая рациональность не отражает осознанное обучение; в биологическом смысле речь идет о том, что те, кто лучше приспособился, быстрее воспроизводятся.

Как будет развиваться использование этих стратегий в процессе такого обучения? Рассмотрим ожидаемую отдачу от стратегии, когда вероятность встретить «я» есть  $p$  (либо потому, что такова доля популяции, использующая эту стратегию, либо потому, что такова средняя вероятностная стратегия, используемая агентами в популяции):

$$E(\text{я}) = p(-2) + (1-p)2 = 2 - 4p,$$

$$E(\text{г}) = p(0) + (1-p)1 = 1 - p.$$

Это означает, что выигрыш от «бытия ястребом» превышает таковой для голубя, если

$$2 - 4p > 1 - p \quad \text{или} \quad p < 1/3,$$

а тогда большее число агентов будет стремиться использовать «я», то есть  $p$  будет расти. Обратно, для «г»  $p > 1/3$  и больше

агентов будет стремиться использовать «г», а значит,  $p$  будет уменьшаться. Следовательно,  $p = 1/3$  определяет ЭУС.

Таким образом, возможно несколько неожиданно, эволюционное разыгрывание этой игры «поддерживает» равновесие по Нэшу в смешанных стратегиях.

Мы весьма неформально и кратко коснулись понятия эволюционно устойчивых стратегий. Подробное изложение основ эволюционной теории игр можно найти в книге Weibull, 1995.

Эволюционная теория игр еще достаточно молода, чтобы можно было судить обо всех ее возможностях. Многочисленные проблемы ждут своего решения. По-видимому, на данный момент времени «эволюционное моделирование» еще слишком стилизовано, чтобы непосредственно использоваться в приложениях. Однако следует отметить, что во многих интересных играх существуют многочисленные равновесия и эволюционная теория игр играет важную роль в понимании того, какие равновесия являются значимыми в различных обстоятельствах.

**З а д а ч а.** Покажите, что в каждой симметричной игре, в которой у каждого игрока есть две чистые стратегии, а выигрыши, соответствующие четырем наборам стратегий, различны, существует смешанная стратегия, являющаяся эволюционно устойчивой.



## Часть II

# Кооперативные игры



## Глава 6.

# Элементы теории кооперативных игр

В этой главе мы приведем основные определения и некоторые результаты, касающиеся теории кооперативных игр, а затем (в разделе 6.4) перечислим некоторые их возможные приложения. Поскольку на первый взгляд может показаться, что сфера приложений кооперативных игр не столь обширна, как сфера приложения бескоалиционных (стратегических) игр, мы не приводим детальное описание какого-то одного или двух достаточно простых примеров, как мы обычно поступали ранее, а, напротив, приводим весьма обширный список многочисленных задач, при исследовании которых используются методы теории кооперативных игр. Более того, в главе 7 мы подробно остановимся на рассмотрении очень широкого класса задач распределения (затрат, излишков, прибыли), тесно связанных с экономикой благосостояния и социальным выбором.

Как уже отмечалось во введении, в теории кооперативных игр основная единица анализа — это, как правило, группа участников, или коалиция. Если игра определена, то частью этого определения является описание того, *что* каждая коалиция игроков может получить (чего она может достичь), без указания на то, *как* исходы или результаты будут влиять на

конкретную коалицию. То есть здесь нас *не интересует* стратегический аспект игры.

## 6.1. Классические кооперативные игры

*Классической кооперативной игрой*, или кооперативной игрой с побочными платежами, называется пара  $\Gamma = (I, v)$ , состоящая из конечного множества  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  и вещественной функции  $v : 2^I \rightarrow \mathbb{R}$ , определенной на множестве всех подмножеств множества  $I$ , причем  $v(\emptyset) = 0$ . Элементы множества  $I$  называются игроками<sup>1</sup>, подмножества  $S \subset I$  — коалициями, а сама функция  $v$  — *характеристической функцией* игры  $\Gamma$ .

Стандартная интерпретация состоит в следующем. Игроки из множества  $I$  могут объединяться в различные коалиции с целью так согласовать свои действия, чтобы получить максимальный выигрыш. Если образуется коалиция  $S$ , то известна величина  $v(S)$ , которая и интерпретируется как тот максимальный суммарный выигрыш игроков из  $S$ , который они могут обеспечить себе, действуя совместно. При этом мы абстрагируемся от того, каким образом должны действовать игроки, чтобы обеспечить себе выигрыш  $v(S)$ , то есть *отыскание оптимальных действий игроков из  $S$  лежит вне данной модели*. Кроме того, в определении классической кооперативной игры предполагается, что полезности игроков обладают свойством трансферабельности, то есть измеряются по одной шкале и могут передаваться от одного игрока другому без потерь и без ограничений (побочные платежи), поэтому такие игры называются также играми с трансферабельной полезностью, или, кратко, ТП-играми. В таком случае игрокам из каждой коалиции важно максимизировать суммарный выигрыш, так как в дальнейшем они могут распределять его между собой произвольным образом. Ниже, в разделе 6.2 мы рассмотрим игры более общей природы — игры без побочных платежей, или так называемые игры с нетрансферабельной полезностью.

---

<sup>1</sup>Мы всегда считаем  $n \geq 2$ .

Заметим, что характеристическая функция может иметь самое разнообразное происхождение. В частности, она может возникать при рассмотрении бескоалиционных игр. А именно, рассмотрим бескоалиционную игру  $\Gamma = \{I, \{Z_i\}_{i \in I}, \{u_i\}_{i \in I}\}$  (здесь мы отступаем от нашего традиционного обозначения множеств стратегий через  $S_i$ , поскольку далее мы обозначаем буквой  $S$  коалиции). Предположим, что игроки, составляющие коалицию  $S \subset I$ , объединяют свои усилия в общих интересах. Какой наибольший суммарный выигрыш может обеспечить себе эта коалиция, независимо от того, каким образом действуют оставшиеся игроки, то есть игроки из  $I \setminus S$ ? Объединение игроков в одну коалицию означает, по сути дела, что они превращаются в единого игрока, для которого мы сохраним то же самое обозначение  $S$ . То, что они действуют совместно, означает, что стратегиями этого игрока являются всевозможные комбинации стратегий, составляющих эту коалицию игроков, то есть пространство стратегий  $Z_S$  игрока  $S$  есть  $Z_S = \prod_{i \in S} Z_i$ . Следовательно, выигрыш игрока  $S$  есть  $U_S(z) = \sum_{i \in S} u_i(z)$ .

Нас интересует тот наибольший выигрыш, который может обеспечить себе эта коалиция. Ясно, что в худшем для игрока  $S$  случае оставшиеся игроки могут тоже объединиться в коалицию  $I \setminus S$  с диаметрально противоположными интересами, то есть  $U_{I \setminus S}(z) = -U_S(z)$ . В результате вопрос о нахождении наибольшего гарантированного выигрыша игрока  $S$  сводится к нахождению значения (если таковое существует) антагонистической игры  $\Gamma_S = \{Z_S, Z_{I \setminus S}, U_S\}$ , или

$$\max_{z_S} \min_{z_{I \setminus S}} U_S(z_S, z_{I \setminus S}),$$

где  $Z_S$ ,  $Z_{I \setminus S}$  — множества стратегий игрока  $S$  и  $I \setminus S$  соответственно, а  $U_S$  — функция выигрышей игрока  $S$  (см. Раздел 1.8 Главы 1). Так определенный выигрыш игрока  $S$  зависит в конечном счете только от коалиции  $S$  (и, конечно, от самой исходной бескоалиционной игры  $\Gamma$ ), являясь ее функцией. Эта функция и есть характеристическая функция

бескоалиционной игры  $\Gamma$ , которая обозначается через  $v_\Gamma$ .

Первоначально именно так определяемая характеристическая функция игры представляла для исследователей особый интерес, однако по мере развития теории кооперативных игр вопрос о том, каким образом возникает характеристическая функция, отошел в тень (хотя он, безусловно, представляет самостоятельный интерес при рассмотрении конкретных моделей, когда возникает необходимость исследовать специфику моделируемой ситуации), и, как мы уже отмечали, стратегический аспект остается вне «сферы интересов» теории кооперативных игр.

Далее мы будем часто говорить об игре  $v$  без указания множества игроков  $I$ . В случае необходимости мы будем обозначать множество игроков в игре с характеристической функцией  $v$  через  $I^v$ .

В зависимости от свойств, накладываемых на характеристическую функцию, рассматриваются различные классы кооперативных игр с побочными платежами. Так, игра называется *несущественной*, если

$$v(S) = \sum_{i \in S} v(\{i\}) \quad \text{для любой коалиции } S \subset I.$$

В дальнейшем мы будем использовать сокращенную запись  $v(i)$  и  $v(S \cup i)$  вместо  $v(\{i\})$  и  $v(S \cup \{i\})$  и т. д. соответственно.

Игра  $v$  называется *супераддитивной*, если для любых коалиций  $S$  и  $T$ , таких что  $S \cap T = \emptyset$ , выполняется неравенство

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Заметим, что определенная выше характеристическая функция бескоалиционной игры обладает свойством супераддитивности, что без труда можно проверить исходя из свойств операций взятия максимума и минимума.

Игра называется *выпуклой*, если для любых коалиций  $S$  и  $T$  выполняется неравенство

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T).$$

Заметим, что выпуклая игра является супераддитивной, так как  $v(\emptyset) = 0$ .

Игра называется *простой*, если характеристическая функция  $v$  принимает только два значения: 0 и 1.

Пусть  $\mathbb{R}^I$  обозначает  $|I|$ -мерное эвклидово пространство, координаты которого заиндексированы элементами из множества  $I$ . Часто бывает удобно рассматривать вектор  $x \in \mathbb{R}^I$  как несуществующую игру, определенную формулой

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i \quad \text{для всех } S \subset I.$$

*Дележом* в игре  $v$  называется вектор  $x \in \mathbb{R}^I$ , удовлетворяющий условиям групповой и индивидуальной рациональности, то есть:

- 1)  $x(I) = v(I)$  и
- 2)  $x_i \geq v(i)$

для всех  $i \in I$ .

Далее мы введем следующие обозначения:

$\mathbb{R}^S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0 \text{ для } i \notin S\}$ ,  $S \subset I$ ;

$X(v) = \{x \in \mathbb{R}^I : x(I) = v(I), x_i \geq v(i) \text{ для любого } i \in I\}$  — множество дележей<sup>2</sup> в игре  $v$ ;

$X^*(v) = \{x \in \mathbb{R}^I : x(I) = v(I)\}$  — множество распределений (пред-дележей<sup>3</sup>) в игре  $v$ .

Если  $G$  — некоторый класс кооперативных игр (вообще говоря, не обязательно с побочными платежами), то под решением на  $G$  обычно понимается отображение  $F$  (однозначное или, быть может, многозначное), ставящее в соответствие каждой игре  $v \in G$  некоторый вектор или непустое множество  $F(v)$  в пространстве  $\mathbb{R}^I$ , которое называется *решением* или *значением* (в случае однозначности) игры  $v$ . Разумеется, отображение  $F$  должно обладать некоторыми определенными свойствами, чтобы «иметь право» называться решением. Компонентам  $F_i(v)$  вектора  $F(v)$  (в случае однозначности

---

<sup>2</sup>Imputation.

<sup>3</sup>Preimputation.

решения) или компонентам вектора  $x \in F(v)$  (в случае многозначности) можно давать различные интерпретации. Так, например, можно считать, что  $F_i(v)$  есть априорная оценка игроком  $i$  выгодности для него игры  $v$ . Можно считать  $F_i(v)$  в некотором смысле средним выигрышем игрока в игре. Можно также интерпретировать  $F_i(v)$  как «справедливую» долю игрока  $i$  в игре  $v$ . Выбирая ту или иную интерпретацию и формализуя интуитивные представления о тех свойствах, которыми должно обладать решение, то есть вводя те или иные аксиомы, можно получать различные отображения  $F$ .

Мы приведем определение ряда наиболее известных решений. Исторически первым и одним из наиболее важных понятий решения является решение, введенное Л. Шепли в его классической работе Shapley, 1953. Шепли рассматривал  $F_i(v)$  как априорную оценку игроком  $i$  выгодности для него игры  $v$ . Он предложил три аксиомы, которым должна удовлетворять функция  $F$ .

A1 (симметричность). Если  $\tau$  — такая перестановка множества  $I^v$ , что для любой коалиции  $S$   $v(\tau S) = v(S)$ , то  $F_{\tau i}(v) = F_i(v)$  для любого  $i \in I^v$ .

A2 (носитель). Если коалиция  $K$  — носитель игры  $v$ , то есть  $v(S) = v(S \cap K)$  для любой коалиции  $S$ , то  $\sum_{i \in K} F_i(v) = v(K)$ .

A3 (линейность). Если для всех  $S$   $w(S) = v(S) + u(S)$ , то для всех  $i$

$$F_i(w) = F_i(v) + F_i(u).$$

Смысл первой аксиомы заключается в том, что оценка игроком игры не должна зависеть от того, каким индексом он обозначен. Вторая аксиома эквивалентна одновременному выполнению двух следующих аксиом.

A2' Если игрок  $j$  в игре  $v$  таков, что  $v(S \cup j) = v(S)$  для любой коалиции  $S$ , то  $F_j(v) = 0$ .

$$A2'' \quad \sum_{i \in I} F_i(v) = v(I).$$

Последнюю аксиому называют условием групповой рациональности, или Парето оптимальности, или также эффективности. Игрок  $j$  из аксиомы  $A2'$  называется «болваном» в игре  $v$ . Этот игрок ничего не получает сам, так как  $v(j) = v(\emptyset) = 0$ , и никак не влияет на выигрыш коалиции, к которой присоединяется. Таким образом, аксиома  $A2'$  требует, чтобы игрок, являющийся болваном, ничего не получал при распределении выигрышей. Аксиома  $A2''$  просто означает, что игроки делят между собой величину  $v(I)$ . Именно эту аксиому мы будем в дальнейшем называть *аксиомой эффективности*. Заметим, что для супераддитивных игр  $v(I)$  есть максимум того, что игроки могут получить суммарно. Аксиома  $A3$  означает, что оценка игры, являющейся суммой двух игр, есть сумма оценок каждой из игр-слагаемых.

Например, рассмотрим следующую весьма простую игру трех лиц  $I = \{1, 2, 3\}$ :

$$\begin{aligned} v(1) &= 0, \quad v(2) = v(3) = 1, \\ v(12) &= v(13) = 1, \\ v(23) &= 3, \\ v(123) &= 3. \end{aligned}$$

В этой игре носитель — это коалиция  $\{2, 3\}$ , игрок 1 — болван.

Перестановка, меняющая местами игроков 2 и 3, сохраняет игру без изменения. Поэтому, если значение Шепли (т.е. функция, удовлетворяющая приведенной системе аксиом) существует, то игрок 1 (в силу  $A2'$ ) должен получить 0, игроки 2 и 3 (в силу  $A1$ ) — поровну, а суммарно (в силу  $A2''$ ) они должны получить 3, т.е. игроки 2 и 3 должны получить по 1.5.

Шепли доказал (доказательство приводится в разделе 6.5), что этим трем аксиомам удовлетворяет единственная функция  $\Phi$ , называемая значением (или функцией, или вектором)

Шепли, определяется следующим образом:

$$\Phi_i(v) = \sum_{S: i \notin S} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} [v(S \cup i) - v(S)],$$

где  $s = |S|$  — число игроков в коалиции  $S$ . В дальнейшем значение Шепли всегда будет обозначаться с помощью  $\Phi$ .

Функцию  $\Phi$  можно интерпретировать не только как оценку игры, но и как функцию, задающую средний выигрыш игроков при следующей вероятностной схеме. Равновероятно выбираем любого из игроков. Далее равновероятно выбираем любого из оставшихся игроков и присоединяем к уже выбранному. Продолжаем этот процесс, пока не исчерпаем все множество  $I$ . При этом, если игрок  $i$  был выбран именно после того момента, когда была уже образована коалиция  $S$ , то он получает выигрыш, равный величине, на которую возрастает выигрыш коалиции из выбранных игроков в результате его присоединения, то есть  $v(S \cup i) - v(S)$ .

Замечательное свойство значения Шепли, на котором основан целый ряд существенных обобщений значения Шепли и, в частности, определение многозначных аналогов значения Шепли (см. Pechersky, Sobolev, 1995), дает следующее предложение.

**Предложение 6.1.1.** (Keane, 1969). *Значение Шепли совпадает с решением задачи минимизации функционала*

$$Q(x, v) = \sum_{S \neq I, \emptyset} (s-1)!(n-s-1)! (v(S) - x(S))^2$$

*на множестве распределений  $X^*(v)$ .*

Доказательство этого предложения можно найти в книге Печерский, Соболев, 1983. При доказательстве используется метод множителей Лагранжа, строгая выпуклость функции  $Q$  и проверяется выполнение всех аксиом Шепли. В частности,

аксиома болвана однозначно определяет коэффициенты  $(s-1)!(n-s-1)!$ .

В качестве решения используются также и другие функции вида

$$F_i(v) = \sum_{S: i \notin S} \gamma(s, n)[v(S \cup i) - v(S)],$$

где  $\gamma(s, n)$  — некоторые коэффициенты. В частности, если  $\gamma(s, n) = 1/2^n$ , то получается так называемый вектор Банзафа (Banzhaf, 1965; Owen, 1975). Однако среди всех этих функций значение Шепли, безусловно, заслуживает наибольшего внимания, так как обладает многими важными свойствами. Так, например, значение Шепли обладает свойством (сильной) ковариантности, то есть если две игры  $v$  и  $v'$  таковы, что

$$v'(S) = cv(S) + a(S) \text{ для некоторых } c > 0 \text{ и } a \in \mathbb{R}^n,$$

то

$$\Phi_i(v') = c\Phi_i(v) + a_i.$$

Заметим также, что очень интересный класс решений представляет семейство значений наименьших квадратов, получающихся при минимизации функций, аналогичных приведенной выше функции  $Q$ , но с произвольными коэффициентами  $w_{n,s} \geq 0$  (см., например, Ruiz, Valenciano, Zurzuelo, 1998).

Прежде чем обратиться к некоторым другим понятиям решений кооперативных игр, необходимо сделать небольшое отступление.

При исследовании решений кооперативных игр используются два базовых метода. Первый — это аксиоматический метод, когда желательные свойства решений формулируются в виде аксиом и исследуется вопрос существования решений, удовлетворяющих этим аксиомам. Такие исследования обычно приводят к так называемым характеристическим теоремам, то есть теоремам, описывающим определенное решение (или класс решений), являющееся единственным решением (или,

соответственно единственным классом решений), которое удовлетворяет введенным аксиомам. (Прекрасным примером здесь является только что определенное значение Шепли.) Часто такие характеризационные теоремы могут иметь форму теорем существования, указывающих в явном (или неявном) виде решение, удовлетворяющее желаемым свойствам. В соответствии с этим методом первичными являются свойства решений и эти свойства используются как основной образующий блок для построения решений.

Второй метод — «противоположно направлен», это своего рода обратный аксиоматический метод. Применяя его, обычно исходят из тех решений, которые выбраны на основе каких-то интуитивных соображений или формальных представлений о схемах, используемых в реальной практике, а лишь затем уже изучают те свойства, которым эти решения удовлетворяют (хотя это уже не является центральным моментом исследований). Здесь, однако, следует особо отметить, что граница, разделяющая эти два метода, весьма и весьма расплывчата в том смысле, что очень часто второй метод естественно переходит в первый: исследование свойств выбранного решения приводит к тому, что полученные свойства (или некоторые из них) становятся аксиомами, которые однозначно и определяют то самое решение, с которого процесс начинался. В этом смысле о втором методе можно тоже достаточно естественно говорить как об аксиоматическом методе, не разделяя строго «прямой» и «обратный» аксиоматический методы. (Мы проиллюстрируем ниже применение аксиоматического метода еще на примере арбитражной схемы Нэша.)

К числу важнейших понятий решения для кооперативных игр относится понятие *c-ядра*, определение которого опирается на *отношение доминирования* на множестве дележей. Это отношение определяется следующим образом.

Пусть  $x$  и  $y$  — два дележа, а  $S$  — некоторая коалиция. Говорят, что  $x$  *доминирует*  $y$  *по коалиции*  $S$ , если

$$(1) \quad x_i > y_i \text{ для всех } i \in S,$$

$$(2) \ x(S) \leq v(S).$$

Второе условие означает, что распределение, соответствующее  $x$ , действительно может быть обеспечено коалицией  $S$ . В этом случае говорят также, что коалиция  $S$  *блокирует* дележ  $y$ .

Говорят, что  $x$  *доминирует*  $y$ , если найдется такая коалиция  $S$ , что  $x$  доминирует  $y$  по коалиции  $S$ .

**Определение 6.1.1.**  $C$ -*ядром*<sup>4</sup>  $C(v)$  игры  $v$  называется множество всех ее недоминируемых дележей.

На самом деле нетрудно доказать, что

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^I : x(I) = v(I), \ x(S) \geq v(S) \text{ для всех } S \subset I\}.$$

Если игра  $v$  выпукла, то значение Шепли игры  $v$  лежат в  $c$ -ядре игры  $v$  (Shapley, 1971). Заметим, что в случае, например, супераддитивности игры  $v$  вектор  $\Phi(v)$  может даже не принадлежать непустому  $c$ -ядру. Более подробно о выпуклых играх см. раздел 6.6.

Классическим результатом о непустоте  $c$ -ядра кооперативных игр с побочными платежами является теорема, доказанная впервые О. Бондаревой (Бондарева, 1963), а затем, независимо, Л. Шепли (Shapley, 1967), утверждающая, что *кооперативная игра имеет непустое  $c$ -ядро тогда и только тогда, когда она сбалансирована*. Понятие сбалансированности вводится следующим образом (см., например, Розенмюллер, 1974) (см. также п. 6.3).

Набор коалиций  $B \subset 2^I$  называется *сбалансированным*, если найдутся такие неотрицательные<sup>5</sup> числа  $\mu_S$ ,  $S \in B$ , что  $\sum_{S \in B} \mu_S e^S = e$ , где  $e = e^I = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^I$ , а  $e^S$  — характеристический вектор коалиции  $S$ , то есть

$$e_i^S = \begin{cases} 1, & i \in S \\ 0, & i \notin S. \end{cases}$$

---

<sup>4</sup>The core.

<sup>5</sup>Часто в определении сбалансированности требуют, чтобы числа  $\mu_s$  были положительными, однако это различие не является существенным.

Кооперативная игра  $v$  называется сбалансированной, если для любого сбалансированного набора коалиций  $B$  имеет место неравенство

$$\sum_{S \in B} \mu_S v(S) \leq v(I).$$

(Мы еще вернемся к понятию сбалансированности в разделе 6.3.)

Наряду с  $c$ -ядром существенную роль играет (сильное)  $\varepsilon$ -ядро (или  $c_\varepsilon$ -ядро) игры, определяемое для произвольного вещественного  $\varepsilon$  следующим образом:

$$C_\varepsilon(v) = \{x \in \mathbb{R}^I : x(I) = v(I), x(S) \geq v(S) - \varepsilon \text{ для всех } S \neq \emptyset, I\}.$$

Ясно, что  $C(v) = C_0(v)$ . Кроме того,  $C_\varepsilon(v) \supset C_{\varepsilon'}(v)$ , если  $\varepsilon > \varepsilon'$ , причем включение строгое, если  $C_\varepsilon(v) \neq \emptyset$ . Очевидно также, что  $C_\varepsilon(v) \neq \emptyset$  для достаточно больших  $\varepsilon$  и, напротив, начиная с некоторого  $\varepsilon$  (быть может, отрицательного) становится пустым.

Определив  $c$ -ядро, невозможно не сказать несколько слов о так называемом *наименьшем  $c$ -ядре*<sup>6</sup> (Maschler, Peleg, Shapley, 1979).

Наименьшее  $c$ -ядро  $LC(v)$  игры  $v$  — это пересечение всех непустых  $\varepsilon$ -ядер игры  $v$ . Эквивалентно пусть  $\varepsilon_0(v)$  — наименьшее  $\varepsilon$  такое, что  $C_\varepsilon(v) \neq \emptyset$ , т. е.

$$\varepsilon_0(v) = \min_{x \in X^*(v)} \max_{S \neq \emptyset, I} e(S, x),$$

причем  $\varepsilon_0(v)$  может быть отрицательным. Тогда  $LC(v) = C_{\varepsilon_0(v)}(v)$ . Иными словами, наименьшее  $c$ -ядро — это множество всех распределений, минимизирующих максимальный эксцесс.

$C$ -ядро было введено Джиллисом (Gillies, 1952, 1959), а  $\varepsilon$ -ядро — Шепли и Шубиком (Shapley, Shubik, 1963, 1966).  $\varepsilon$ -

---

<sup>6</sup>Least core.

ядро интерпретируется как множество эффективных распределений, которые не могут быть улучшены ни одной из коалиций при условии, что формирование коалиции требует «затрат»  $\varepsilon$  (или вознаграждается «бонусом»  $-\varepsilon$ , если  $\varepsilon < 0$ ). Наименьшее  $c$ -ядро комбинирует идею существования (непустоты) и единственности. Если  $c$ -ядро игры непусто, т.е.  $\varepsilon_0 \leq 0$ , то наименьшее  $c$ -ядро — это «центрально расположенное» подмножество (или точка)  $c$ -ядра. Если  $c$ -ядро пусто, т.е.  $\varepsilon_0 > 0$ , то наименьшее  $c$ -ядро может рассматриваться как «латентное» положение  $c$ -ядра.

Интересно также еще одно особое число:

$$\varepsilon_1(v) = \max_{S \neq I, \emptyset} (v(S) - \sum_{i \in S} v(i)),$$

представляющее наибольший выигрыш, который может обеспечить себе любая группа игроков, образующих коалицию.

Следующее свойство  $\varepsilon$ -ядра немедленно следует из определения:  $C_\varepsilon(v) \supset X(v)$  тогда и только тогда, когда  $\varepsilon \geq \varepsilon_1(v)$ .  $\varepsilon$ -ядра, включая наименьшее  $c$ -ядро и само  $c$ -ядро, представляют собой компактные выпуклые многогранники, ограниченные не более чем  $2^n - 2$  гиперплоскостями вида

$$H_S^\varepsilon = \{x \in X^*(v) : x(S) = v(S) - \varepsilon\}, \quad S \neq \emptyset, I.$$

Все непустые  $\varepsilon$ -ядра, за исключением наименьшего  $c$ -ядра, имеют размерность  $n - 1$ , т.е. размерность  $X^*(v)$ . Размерность наименьшего  $c$ -ядра всегда не превосходит  $n - 2$ .

**Предложение 6.1.2.** Если две игры  $(I, v)$  и  $(I, v')$  имеют совпадающие  $\varepsilon$ -ядра, т.е.

$$C_\varepsilon(v) = C_\varepsilon(v') \neq \emptyset,$$

то и все меньшие  $\varepsilon$ -ядра совпадают, т.е.

$$C_{\varepsilon-\sigma}(v) = C_{\varepsilon'-\sigma}(v')$$

для любого  $\sigma > 0$ . В частности,  $LC(v) = LC(v')$ .

Рассмотрение  $\varepsilon$ -ядра оказывается очень полезным при рассмотрении  $k$ -ядра и  $n$ -ядра кооперативных игр (см. ниже).

На основе понятий *угрозы* и *контругрозы* дается определение переговорного множества: пусть  $x$  — дележ в игре  $v$ .

- Пара  $(y, S)$ , где  $S$  — коалиция, а  $y$  достижим для  $S$ , т.е.  $y(S) = v(S)$ , называется *угрозой  $i$  против  $j$  относительно  $x$* , если  $S \ni i$ , но  $S \not\ni j$  и  $y_k > x_k \forall k \in S$ .
- Пара  $(z, T)$ , где  $T$  — коалиция, а  $z$   $T$ -достижим, называется *контругрозой относительно угрозы  $(y, S)$  игрока  $i$  против  $j$* , если  $T \ni j$ , но  $T \not\ni i$  и  $z_k \geq x_k \forall k \in T \setminus S$ ,  $z_k \geq y_k \forall k \in T \cap S$ .

**Определение 6.1.2.** *Переговорным множеством<sup>7</sup> называется множество дележей  $x$  таких, что для любой угрозы  $(y, S)$  игрока  $i$  против любого другого игрока  $j$  относительно  $x$  существует контругроза игрока  $j$  относительно  $(y, S)$ .*

**Предложение 6.1.3.** *Переговорное множество всегда непусто и содержит  $\varepsilon$ -ядро.*

Другими, чрезвычайно важными понятиями решения кооперативных игр являются понятия  $n$ -ядра<sup>8</sup> и  $k$ -ядра<sup>9</sup>, а также их модификации — пред- $n$ -ядро<sup>10</sup> и пред- $k$ -ядро<sup>11</sup>. Введенное Д. Шмайндлером понятие  $n$ -ядра игры (Schmeidler, 1969) опирается на понятие эксцесса коалиции. Для классической кооперативной игры  $v$  стандартный эксцесс (или функция эксцесса) определяется естественным образом:  $e(S, x) = v(S) - x(S)$ . Величина  $e(S, x)$  называется

---

<sup>7</sup>Bargaining set.

<sup>8</sup>The nucleolus.

<sup>9</sup>The kernel.

<sup>10</sup>Prenucleolus.

<sup>11</sup>Prekernel.

*эксцессом коалиции  $S$  в  $x$*  и интерпретируется как мера неудовлетворенности коалиции распределением выигрышей, которое предписывается вектором  $x$ . Заметим здесь, что чем больше  $x$ , тем меньше эксцесс, и, тем самым, «меньше неудовлетворенность». В этом смысле мы можно говорить, что эксцесс монотонен по  $v$  и антимонотонен по  $x$ .

Пусть  $X$  — произвольное непустое замкнутое множество в  $\mathbb{R}^I$ . Для любого  $x \in X$  и любой кооперативной игры  $v$  определим вектор  $\theta(x)$  следующим образом:

$$\theta(x) = (e(S_1, x), e(S_2, x), \dots, e(S_{2^n}, x)),$$

где различные эксцессы всех коалиций расположены в убывающем (невозрастающем) порядке. Компоненты вектора  $\theta(x)$  определены и непрерывны. Будем говорить, что  $\theta(x)$  *лексикографически меньше, чем  $\theta(y)$* , и обозначать это как  $\theta(x) <_{lex} \theta(y)$ , если существует такое натуральное число  $q$ , что  $\theta_i(x) = \theta_i(y)$  для любого  $i < q$  и  $\theta_q(x) < \theta_q(y)$ .

$N$ -ядром игры  $v$  относительно множества  $X$  (и данного семейства эксцессов  $e(S, \cdot), S \subset I$ ), которое мы будем обозначать через  $N(X, v)$ , называется множество тех векторов из множества  $X$ , для которых соответствующие вектора  $\theta$  минимальны относительно определенного лексикографического порядка, то есть

$$N(X, v) = \{x \in X : \theta(x) \leq_{lex} \theta(y) \text{ для всех } y \in X\}.$$

Если  $X = X(v)$ , то  $N(X, v) := N(v)$  называется  $n$ -ядром игры  $v$ . Если  $X = X^*(v)$ , то  $N(X, v) := PN(v) \equiv N^*(v)$  называется *пред- $n$ -ядром* игры  $v$ .

**Теорема 6.1.1.** (Schmeidler, 1969; Kohlberg, 1971). *Если  $X$  компактно или если оно замкнуто и  $x(I) \leq \text{const}$  для всех  $x \in X$ , то  $N(X, v)$  непусто. Если, кроме того,  $X$  выпукло, то  $N(X, v)$  состоит из одной точки и непрерывно зависит от характеристической функции.*

Важнейшим свойством  $n$ -ядра и пред- $n$ -ядра является следующее следствие из этой теоремы.

**Следствие 6.1.1.**  *$N$ -ядро игры  $v$  (и пред- $n$ -ядро игры  $v$ ) одноточечно и лежит в  $c$ -ядре игры  $v$ , если оно непусто.*

Докажем для примера одноточечность  $n$ -ядра.

Пусть  $v$  — ТП игра и  $x, y \in N(v) \Rightarrow Q(x) = Q(y)$ . Мы покажем, что  $e(S, x) = e(S, y) \forall S$  и в частности  $e(i, x) = e(i, y) \Rightarrow x = y$ . Пусть  $S^*: e(S^*, x) \neq e(S^*, y)$ . Рассмотрим дележ  $z = \frac{1}{2}(x + y)$ . Обозначим через  $B_1(x), \dots, B_k(x)$  разбиение множества всех коалиций такое, что  $S, S' \in B_k(x) \iff e(S, x) = e(S', x)$ , т.е.  $\forall S \in B_k(x), e(S, x) = \alpha_k(x)$ . Считаем  $\alpha_1(x) > \alpha_2(x) > \dots > \alpha_k(x)$ . Ясно, что  $\alpha_k(x) = \alpha_k(y) \forall k$  и  $|B_k(x)| = |B_k(y)| \forall k$ . Но так как  $e(S^*, x) \neq e(S^*, y)$ , то существует минимальное  $k^*$ , для которого  $B_{k^*}(x) \neq B_{k^*}(y)$ . Если  $B_{k^*}(x) \cap B_{k^*}(y) \neq \emptyset$ , то  $B_{k^*}(z) = B_{k^*}(x) \cap B_{k^*}(y) \subset B_{k^*}(x)$ ; если  $B_{k^*}(x) \cap B_{k^*}(y) = \emptyset$ , то  $\alpha_{k^*}(z) < \alpha_{k^*}(x) = \alpha_{k^*}(y)$ .

В любом случае  $\theta(z) <_{lex} \theta(x)$ , что противоречит тому, что  $x \in N(v)$ .

Еще одно полезное свойство  $n$ -ядра дается следующим утверждением.

**Предложение 6.1.4.** *Пусть  $u$  и  $v$  — две игры такие, что  $u(I) = v(I)$  и  $v(S) = u(S) + a$  для всех  $S \neq I$  и некоторого числа  $a$ . Тогда  $N^*(v) = N^*(u)$ .*

Интересно, что определение  $n$ -ядра можно дать в терминах угроз и контругроз (см. Osborne, Rubinstein, 1994). А именно, пусть  $x$  — дележ в игре  $v$ .

Пара  $(S, y)$ , состоящая из дележа  $y$  и коалиции  $S$ , называется *угрозой относительно  $x$* , если  $e(S, x) > e(S, y)$  (то есть  $y(S) > x(S)$ ).

Коалиция  $T$  называется *контругрозой относительно угрозы  $(S, y)$* , если  $e(T, y) > e(T, x)$  (то есть  $x(T) > y(T)$ ) и  $e(T, y) > e(S, x)$ .

Тогда  $n$ -ядром игры  $v$  называется такой дележ  $x$ , что для каждой угрозы  $(S, y)$  относительно  $x$  найдется контругроза.

$K$ -ядро и пред- $k$ -ядро исследовалось во многих работах начиная со статей М. Дэвиса и М. Машлера (Davis, Maschler, 1965), М. Машлера и Б. Пелега (Maschler, Peleg, 1966, 1967), М. Машлера, Б. Пелега и Л. Шепли (Maschler, Peleg, Shapley, 1972, 1979). В действительности, исторически  $k$ -ядро предшествовало  $n$ -ядру: один из неожиданных результатов статьи Maschler, Peleg, 1966 состоял в том, что если для произвольного  $\varepsilon$  множество  $C_\varepsilon(v) \cap X(v)$  непусто, то  $k$ -ядро пересекает это множество (неожиданных потому, что определение  $k$ -ядра никак не опирается на понятие  $c$ -ядра). Исследуя именно этот факт, Шмайдлер и дал определение  $n$ -ядра, которое, с одной стороны, является «уникальной» точкой  $k$ -ядра, а с другой стороны, как оказывается, весьма тесно связано с концепцией  $\varepsilon$ -ядра. (Говоря неформально, именно на некоторым образом сконструированном процессе трансформации непустого  $\varepsilon$ -ядра построена геометрическая характеристика  $n$ -ядра (см. Maschler, Peleg, Shapley, 1979). При такой трансформации грани непустого  $\varepsilon$ -ядра для достаточно большого  $\varepsilon$  начинают равномерно с одинаковой скоростью (за счет уменьшения  $\varepsilon$ ) сдвигаться параллельно себе до тех пор, пока множество, ограничиваемое этими гранями, не станет пустым, либо не «отделится» от  $c$ -ядра. Далее некоторые грани сдвигать уже становится невозможным, поэтому продолжают сдвигать оставшиеся грани до тех пор, пока множество, ограничиваемое гранями, не станет пустым, либо не «отделится» от  $c$ -ядра. И так далее, пока не останется единственная точка. Эта точка и будет  $n$ -ядром.)

Пусть  $v$  — произвольная кооперативная игра. Обозначим для любых двух различных игроков  $i, j \in I$  через  $T_{ij}$  множество тех коалиций, которые содержат  $i$ , но не содержат  $j$ , то есть

$$T_{ij} = \{S : S \subset I, i \in S, j \notin S\}.$$

Для каждого распределения  $x \in X^*(v)$  определим «максимальное преимущество игрока  $i$  над  $j$ » следующим образом:

$$S_{ij}(x) = \max_{S \in T_{ij}} e(s, x).$$

Величину  $s_{ij}(x)$  можно интерпретировать как максимум того, что игрок  $i$  может надеяться выиграть (минимум проиграть в случае отрицательности), если он отклонится от  $x$  и образует коалицию, которая не нуждается в согласии игрока  $j$ , в предположении, что другие участники этой коалиции удовлетворены тем, что им дает  $x$ . *Игроки  $i$  и  $j$  находятся в равновесии для  $x$* , если  $s_{ij}(x) = s_{ji}(x)$ .

Если вместо множества распределений  $X^*(v)$  взять множество дележей  $X(v)$ , то условие равновесия переписывается в виде двух неравенств:

$$[s_{ij}(x) - s_{ji}(x)][x_j - v(j)] \leq 0$$

и аналогичного неравенства с перестановкой  $i$  и  $j$ .

$K$ -ядром  $K(v)$  игры  $v$  называется множество тех дележей  $x \in X(v)$ , для которых любые два игрока находятся в равновесии. *Пред- $k$ -ядром*  $K^*(v)$  игры  $v$  называется множество тех пред-дележей  $x \in X^*(v)$ , для которых любые два игрока находятся в равновесии, то есть

$$\begin{aligned} K^*(v) &= \{x \in \mathbb{R}^I : \max_{S: i \in S, j \notin S} (v(S) - x(S)) = \\ &= \max_{S: j \in S, i \notin S} (v(S) - x(S)), i, j \in I; x(I) = v(I)\}. \end{aligned}$$

**Предложение 6.1.5.**  *$K$ -ядро и пред- $k$ -ядро всегда непусты. Для любой игры  $v$  имеет место равенство  $K(v) \cap C(v) = K^*(v) \cap C(v)$ . Кроме того,  $k$ -ядро лежит в переговорном множестве.*

Заметим, что  $k$ -ядро может иметь весьма своеобразное строение, как показывает пример 4 ниже.

Прежде чем привести некоторые примеры решений, необходимо отметить, что мы ничего не сказали относительно аксиоматического подхода к определению таких решений, как

$s$ -ядро,  $n$ -ядро,  $k$ -ядро и т. д. Мы отсылаем по этому поводу читателя к работам Maschler, 1992; Pechersky, Sobolev, 1995; Peleg, 1986, 1992 и многим другим. При этом необходимо подчеркнуть, что применение аксиоматического подхода оказывается чрезвычайно плодотворным. Мы остановимся на этом несколько подробнее в п. 6.4.

Приведем несколько простых примеров решений.

**Пример 1. Простая игра.** Кооперативная игра  $v$  называется простой, если  $v(S)$  принимает только значения 0 и 1 для любой коалиции  $S \neq I$  и  $v(I) = 1$ ; коалиции  $S$ , для которых  $v(S) = 1$ , называются *выигрывающими*. Игрок, принадлежащий всем выигрывающим коалициям, называется вето-игроком. Тогда

- a) Если в игре нет вето-игрока, то  $C(v) = \emptyset$  (докажите!).
- b) Если множество вето-игроков в игре  $v$  непусто, то  $s$ -ядро состоит из векторов выигрышей, дающих 0 всем остальным игрокам (докажите!).

**Пример 2. Мажоритарная игра 3-х лиц.**

- a) Пусть  $I = \{1, 2, 3\}$ ,  $v(I) = 1$ ,  $v(S) = \alpha \in [0, 1]$  для любой коалиции  $S$ , состоящей из двух игроков, и  $v(i) = 0$  для любого  $i \in I$ . Тогда  $s$ -ядро  $C(v)$  непусто тогда и только тогда, когда  $\alpha \leq 2/3$  (докажите!).
- b) Пусть теперь  $\alpha = 1$ . Тогда  $s$ -ядро такой игры пусто. Можно показать, что переговорное множество этой игры состоит из единственного вектора  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ .

Действительно, предположим, что  $x$ -дележ и  $(y, S)$  — это угроза  $i$  против  $j$  относительно  $x$ . Тогда  $S = \{i, h\}$ , где  $h$  — оставшийся игрок и  $y_h < 1 - x_i$  (т.к.  $y_i > x_i$  и  $y(S) = v(S) = 1$ ). Для того чтобы у  $j$  нашлась контругроза на  $(y, S)$ , мы должны иметь  $y_h + x_j \leq 1$ . Следовательно, для того, чтобы  $x$  принадлежал переговорному множеству, необходимо, чтобы для всех игроков  $i, j, h$  было выполнено неравенство  $y_h \leq$

$1-x_j$ , как только  $y_h < 1-x_i$ , а это означает, что  $1-x_i \leq 1-x_j$  или  $x_i \geq x_j$  для любых  $i$  и  $j$ , так что  $x = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ .

**Пример 3.** *Взвешенная мажоритарная игра.* Такая игра представляет собой простую игру  $v$ , для которой

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } w(S) \geq q, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

для некоторого числа  $q$  и  $w \in \mathbb{R}_+^I$ , где  $v(S) = \sum_{i \in S} w_i$  для каждой коалиции  $S$ . Интерпретация такова:  $w_i$  — число голосов, имеющихся у игрока  $i$ , а  $q$  — число голосов, необходимых для победы. Взвешенная мажоритарная игра (ВМИ) является *однородной*, если  $w(S) = q$  для любой минимальной выигрывающей коалиции  $S$  (т.е. коалиции, не содержащей никаких выигрывающих коалиций). ВМИ является игрой с нулевой суммой, если для любой коалиции  $S$  либо  $v(S) = 1$ , либо  $v(I \setminus S) = 1$ , но не одновременно. Предположим, что  $v$  — однородная ВМИ с нулевой суммой, в которой  $w_i = 0$  для каждого игрока  $i$ , не принадлежащего ни одной минимальной выигрывающей коалиции. Тогда  $N(v) = \left( \frac{w_1}{w(I)}, \dots, \frac{w_n}{w(I)} \right)$ .

**Пример 4.** Рассмотрим следующую игру семи лиц.

$$v(124) = v(235) = v(346) = v(457) = v(561) = v(672) = v(713) = 1,$$

$v(S) = 1$  для любой коалиции  $S$ , содержащей перечисленные выше коалиции,

$v(S) = 0$  в остальных случаях.

$K$ -ядро состоит из 7 отрезков, соединяющих  $(1/7, 1/7, \dots, 1/7)$  с точками, в которых минимальная выигрывающая коалиция делит свой выигрыш поровну.

**Определение 6.1.3.** *Однозначное решение монотонно, если увеличение  $v(I)$  при сохранении значений остальных  $S$  не уменьшает выигрыш ни одного из игроков.*

Легко убедиться в том, что значение Шепли монотонно. Однако  $n$ -ядро этим свойством уже не обладает. Действительно, рассмотрим следующий пример (Maschler, 1992).

**Пример 5.**  $I = \{1, \dots, 9\}$ . Пусть  $x = (1, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$ ;  
 $v(S) = 6$  для  $S \in \{123, 14, 24, 34, 15, 25, 35, 78\}$ ,  
 $v(S) = 9$  для  $S \in \{12367, 12368, 12369, 456\}$ ,  
 $v(I) = 12$ ,  $v(S) = \sum_{i \in S} x(i) - 1$  в остальных случаях.  
 $w(I) = v(I) + 1$ ,  $w(S) = v(S)$ .

Тогда

$$N(v) = x, \quad N(w) = (1\frac{1}{9}, 1\frac{1}{9}, 1\frac{1}{9}, 2\frac{2}{9}, 2\frac{2}{9}, 1\frac{8}{9}, 1\frac{1}{9}, 1\frac{1}{9}, 1\frac{1}{9}).$$

**Пример 6.** *Задача о банкротстве.* Любопытно, что задачи банкротства имеют очень давнюю историю. Приведем решение задачи банкротства, которая восходит к Талмуду (см. например, Aumann, Maschler, 1985; Maschler, 1992), где описана следующая ситуация. Три вдовы одного мужа предъявляют требования на имущество, оставшееся после смерти мужа, в размере 100, 200 и 300 единиц соответственно. Рассматриваются три случая, когда имущество оценивается в 100, 200 и 300 единиц.

Талмуд приписывает в первом случае распределение  $(33\frac{1}{3}, 33\frac{1}{3}, 33\frac{1}{3})$ , во втором —  $(50, 75, 75)$  и в третьем —  $(50, 100, 150)$ . Оказывается, что если определить кооперативную игру для множества игроков (жен)  $I = \{1, 2, 3\}$  по формуле

$$v(S) = \max\{\text{«имущество минус сумма требований членов» } I \setminus S, 0\},$$

то приведенные выше распределения являются  $n$ -ядрами соответствующих кооперативных игр.

**Пример 7.** (Littlechild, Owen, 1973). Предположим, что  $n$  авиакомпаний должны распределить затраты на строительство взлетно-посадочной полосы, причем для обслуживания самолетов, принадлежащих авиакомпании  $i$ , достаточно, чтобы длина взлетно-посадочной полосы была равна  $c_i$ . Будем считать, что затраты пропорциональны длине и, без ущерба для общности, что

$$c_n \leq c_{n-1} \leq \dots \leq c_1.$$

Таким образом, если образуется коалиция  $S$ , то затраты этой коалиции есть  $c(S) = \max_{i \in S} \{c_i\}$ .

Можно проверить, что эта игра выпукла. Вектор Шепли  $w$  здесь оказывается следующим:

$$w_n = \frac{1}{n}c_n, \quad w_{n-1} = \frac{1}{n}c_n + \frac{1}{n-1}(c_{n-1} - c_n), \dots,$$

$$w_i = \sum_{j=i}^n \frac{1}{j}(c_j - c_{j+1}) \quad \text{для всех } i = 1, \dots, n,$$

причем мы считаем  $c_{n+1} = 0$ .

Иными словами, за ту часть полосы, которой пользуются все авиакомпании, все компании платят поровну. За «следующую» часть, которой пользуются  $n-1$  компании, они платят поровну, и т. д.

## 6.2. Игры без побочных платежей

Очень часто, однако, приходится сталкиваться с ситуациями, когда рассмотрение игр с побочными платежами ставит чрезмерно жесткие ограничения. А именно, может случиться так, что игроки не могут вообще или не могут без потерь перераспределять между собой полученные в ходе игры выигрыши. Иными словами, не все побочные платежи оказываются возможными. Это может быть вызвано, например, следующими причинами. Во-первых, может не иметься единого средства обмена, а во-вторых, даже если такое средство обмена существует (например, деньги), то полезности игроков могут не быть возрастающими линейными функциями денег. Наконец, побочные платежи могут быть запрещены (например, законом) или быть ограниченными. В такой ситуации задачу распределения выигрышей уже нельзя рассматривать как классическую кооперативную игру, а приходится обращаться к более сложной модели, а именно к так называемым кооперативным играм без побочных платежей (играм с нетрансферабельной полезностью, или, как мы будем их часто сокращенно называть, НТП-играм). Разумеется, классическую кооперативную

игру можно рассматривать как частный случай кооперативной игры без побочных платежей, при этом основные идеи теории классических кооперативных игр переносятся и на игры без побочных платежей, но здесь возникает целый ряд проблем, связанных, например, со спецификой аппарата, используемого в теории НТП-игр, который в последнем случае гораздо сложнее. Помимо этого, в рамках теории кооперативных игр без побочных платежей оказываются содержательными такие задачи, которые для классических кооперативных игр достаточно просты или даже тривиальны.

*Кооперативной игрой без побочных платежей* (или *НТП-игрой*) называется пара  $(I, V)$ , где  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  — множество игроков, а  $V$  — многозначное отображение, которое ставит в соответствие каждой коалиции  $S \subset I$  множество  $V(S)$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- (1)  $V(S) \subset \mathbb{R}^I = \{x \in \mathbb{R}^I : x_i = 0 \text{ для } i \notin S\}$ ;
- (2)  $V(S)$  — непустое, замкнутое и исчерпывающее множество в  $\mathbb{R}^S$ , то есть из  $x \in V(S)$ ,  $y \in \mathbb{R}^S$  и  $y \leq x$  следует  $y \in V(S)$  (или, что то же самое,  $V(S) = V(S) - R_+^S$ ).

Часто бывает удобно использовать слегка модифицированное определение игры без побочных платежей, рассматривая вместо множеств  $V(S) \subset \mathbb{R}^S$  соответствующие цилиндры  $V^\wedge(S) = V(S) + \mathbb{R}^{I \setminus S}$ .

Множество  $V(S)$  обычно интерпретируется как множество векторов полезностей (множество векторов выигрышей, выраженных в терминах полезностей), которые коалиция  $S$  может обеспечить своим членам, то есть пространство  $\mathbb{R}^I$  рассматривается как пространство полезностей. Мы будем иногда называть множества  $V(S)$  игровыми подмножествами. По классической кооперативной игре  $v$  можно стандартным образом построить игру без побочных платежей, положив

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^S : x(S) \leq v(S)\}.$$

Здесь множества  $V(S)$  являются полупространствами в  $\mathbb{R}^S$ , граничные гиперплоскости которых имеют соответствующие нормали  $e^S$ , где  $e = (1, 1, \dots, 1)$ <sup>12</sup>.

Важный частный случай НТП-игр представляют арбитражные схемы. *Арбитражной схемой*  $n$  лиц называется пара  $(q, Q)$ , где  $q \in \mathbb{R}^I$ , а  $Q \subset \mathbb{R}^I$ . Компоненты арбитражной схемы имеют следующий смысл: игроки получают (или уже имеют) выигрыши, соответствующие координатам вектора  $q$ , если они не договорились о создании коалиции  $I$ , объединяющей всех игроков. Точка  $q$  называется точкой *status quo*. Если же игроки объединились в единую большую коалицию  $I$ , то они имеют возможность получить выигрыши в соответствии с любым вектором из множества  $Q$ . Арбитражная схема  $(q, Q)$  естественным образом порождает следующую игру без побочных платежей:

$$\begin{aligned} V(S) &= \{x \in \mathbb{R}^S : x_i \leq q_i, i \in S\}, \quad S \neq I, \\ V(I) &= \{x \in \mathbb{R}^I : x \leq y \text{ для некоторого } y \in Q\}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что любая коалиция  $S \neq I$  в такой игре может обеспечить любому игроку  $i \in S$  выигрыш, не превышающий  $q_i$ , но такие же выигрыши игроки могут получить и самостоятельно, не объединяясь ни в какие коалиции, отличные от  $\{i\}$ . Лишь объединившись в коалицию  $I$ , игроки могут добиться большего (как правило, считается, что во множестве  $Q$  есть точки  $x > q$ ). Соответственно вопрос о решении арбитражной схемы сводится к вопросу об определении некоторой точки из множества  $Q$ , которую можно было бы считать в некотором смысле «справедливым» распределением выигрышей.

Арбитражные схемы (или задачи о сделках, или задачи торга<sup>13</sup>) представляют особый интерес. Не останавливаясь здесь на них подробно, отметим, тем не менее, следующий важный момент. Одной из причин, по которой упомянутые игры называются «арбитражными схемами», является

<sup>12</sup>Для вектора  $a \in \mathbb{R}^n$  через  $a^S$  обозначается проекция  $a$  на  $\mathbb{R}^S$ .

<sup>13</sup>Bargaining games.

следующее. Как правило, для решения подобного вида игр используется аксиоматический метод, то есть формулируется ряд свойств, которым должно обладать решение таких игр. А значит, нахождение решения такой игры можно трактовать следующим образом: «справедливое» распределение определяет некий беспристрастный арбитр, руководствуясь некоторыми правилами (сформулированными в виде аксиом).

В качестве примера рассмотрим классическую арбитражную схему Нэша. Нэшем (Nash, 1950) была предложена система аксиом, которой должно удовлетворять значение (решение), определенное на множестве  $G^2$  арбитражных схем (далее АС) двух лиц с выпуклыми компактными множествами допустимых векторов выигрышей  $Q$ , в которых существует вектор  $x > q$ . Значением Нэша (или арбитражным решением Нэша) называется функция  $r : G^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , (мы будем обозначать  $r(q, Q) = \bar{q} = (\bar{q}_1, \bar{q}_2)$ ), удовлетворяющая следующим шести аксиомам.

N1 (индивидуальная рациональность).  $\bar{q} \geq q$ .

N2 (допустимость).  $\bar{q} \in Q$ .

N3 (Парето-оптимальность).  $\bar{q} \in \pi Q$ , где  $\pi Q$  — множество Парето-оптимальных точек множества  $Q$ .

N4 (независимость от посторонних альтернатив). Если  $\bar{q} \in Q \subset Q_1$  и  $\bar{q}$  — решение АС  $(q, Q_1)$ , то  $\bar{q}$  является решением и АС  $(q, Q)$ .

N5 (независимость от аффинного преобразования). Пусть  $Q_1$  получается из  $Q$  с помощью аффинного преобразования

$$\begin{aligned} x'_1 &= \alpha_1 x_1 + \beta_1, & \alpha_1 > 0, \\ x'_2 &= \alpha_2 x_2 + \beta_2, & \alpha_2 > 0. \end{aligned}$$

Тогда, если  $\bar{q}$  — решение  $(q, Q)$ , то  $(\alpha_1 \bar{q}_1 + \beta_1, \alpha_2 \bar{q}_2 + \beta_2)$  является решением  $(q', Q_1)$ .

N6 (симметричность). Пусть множество  $Q$  таково, что  $(x_1, x_2) \in Q$  тогда и только тогда, когда  $(x_2, x_1) \in Q$ , и пусть  $q_1 = q_2$ . Тогда  $\bar{q}_1 = \bar{q}_2$ .

Нэш доказал, что *существует единственная функция  $r$ , удовлетворяющая аксиомам N1–N6, причем*

$$(\overline{q_1} - q_1)(\overline{q_2} - q_2) = \max_{x \in Q} (x_1 - q_1)(x_2 - q_2).$$

Аналогичная теорема имеет место и в случае  $n > 2$ .

Мы вернемся к более подробному рассмотрению задач подобного типа в главе 7, где обратимся к задачам распределения.

Существует широкий спектр различных арбитражных решений, каждое из которых определяется своей системой аксиом (см., например, обзор Roth, 1979, а также Печерский, Соболев, 1983; Peters, 1985, 1986 и др.).

Игру с побочными платежами  $v$ , но нетрансферабельной полезностью также можно рассматривать как игру без побочных платежей. Если  $u_i(b)$  есть полезность  $b$  единиц для игрока  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) и функция полезности такова, что  $u_i(y) = u_i(y_i)$ ,  $y \in \mathbb{R}^I$ , то множество

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^S : \exists y \in \mathbb{R}^I, y(S) = v(S), x \leq u^S(y)\}$$

представляет собой множество векторов полезностей, достижимых коалицией  $S$ .

Под решением игры без побочных платежей, как и под решением классической кооперативной игры, понимается некоторый вектор или множество векторов  $x \in \mathbb{R}^I$ . Различные понятия решений, возникающие в классических кооперативных играх, можно перенести и на игры без побочных платежей. Это может быть сделано, вообще говоря, различными способами, хотя при этом возникает целый ряд как технических, так и концептуальных трудностей. Так, например, определение  $s$ -ядра, основанное на понятии доминирования, непосредственно переносится на НТП-игры, а именно,  $s$ -ядро игры без побочных платежей  $V$  есть множество

$$C(V) = \{x \in V(I) : \forall S \text{ не существует}$$

$y \in V(S)$  такого, что  $y_i > x_i \forall i \in S$ .

Однако в этом случае гораздо сложнее решается вопрос непустоты  $c$ -ядра (см. по этому поводу, например, Scarf, 1967; Shapley, 1973). (Соответствующие теоремы также связаны с понятием сбалансированности и выпуклости, однако условия непустоты оказываются достаточными, но не необходимыми.)

Мы приведем теорему о непустоте  $c$ -ядра НТП-игры, аналогичную теореме о непустоте  $c$ -ядра выпуклой ТП-игры. В случае игр без побочных платежей выпуклость можно определить двояко.

НТП-игра называется *ординально выпуклой*, если  $\forall S, T \subset I$

$$V^\wedge(S) \cap V^\wedge(T) \subset V^\wedge(S \cap T) \cup V^\wedge(S \cup T),$$

где  $V^\wedge(\emptyset) = \{\mathbf{0}\}$  и  $V^\wedge(S) = V(S) + \mathbb{R}^{I \setminus S}$ .

Игра  $V$  называется *кардинально выпуклой*, если  $\forall S, T \subset I$ ,

$$V(S) + V(T) \subset V(S \cap T) + V(S \cup T),$$

где  $V(\emptyset) = \emptyset$ .

Заметим, что кардинальная выпуклость и ординальная выпуклость не эквивалентны. Рассмотрим следующие две игры (Ichiishi, 1992).

- (1)  $I = \{1, 2, 3\}$ ,  $V(j) = \{x \in \mathbb{R}^{\{j\}} : x_j \leq 0\}$ ,  
 $V(i, j) = \{x \in \mathbb{R}^{\{i, j\}} : x_i \leq 1, x_j \leq 1\}$  для  $i \neq j$ ,  
 $V(1, 2, 3) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_j \leq 1, j = 1, 2, 3\}$ .
- (2)  $I = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $V(2, 3) = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_2 \leq 1, x_3 \leq 3\}$ ,  
 $V(1, 2, 3) = \{x \in \mathbb{R}^{\{1, 2, 3\}} : x_1 \leq 1, x_2 \leq 2, x_3 \leq 2\}$ ,  
 $V(2, 3, 4) = \{x \in \mathbb{R}^{\{2, 3, 4\}} : x_2 \leq 2, x_3 \leq 2, x_4 \leq 1\}$ ,  

$$\begin{aligned} V(I) &= \{x \in \mathbb{R}^I : x_1 \leq 1, x_2 \leq 2, x_3 \leq 2, x_4 \leq 0\} \cup \\ &\cup \{x \in \mathbb{R}^I : x_1 \leq 0, x_2 \leq 2, x_3 \leq 2, x_4 \leq 1\} \cup \\ &\cup \{x \in \mathbb{R}^I : x_1 \leq 1, x_2 \leq 3, x_3 \leq 1, x_4 \leq 1\}, \\ V(S) &= \{x \in \mathbb{R}^S : x_i \leq 0, i \in S\} \text{ для остальных } S. \end{aligned}$$

Первая игра ординально выпукла, но не является кардинально выпуклой, а вторая — напротив, кардинально выпукла, но не является ординально выпуклой! Впрочем, в случае ТП-игры эти понятия эквивалентны.

**Теорема 6.2.1.** (Вилков, 1977). Пусть  $V$  — НТП-игра, и  $b \in \mathbb{R}^I$  определен так, что  $b_j = \sup\{x_j \in \mathbb{R} : x_j \in V(j)\}$ ,  $j \in I$ . Тогда  $s$ -ядро игры  $V$  непусто, если

- (1)  $\exists M \in \mathbb{R}$  такое, что  $\forall S \subset I$  из  $x \in V(S)$  и  $x \geq b$  следует, что  $x_i < M$  для любого  $i \in S$ ;
- (2)  $V$  — ординально выпукла.

Заметим также, что кардинально выпуклая игра тоже имеет непустое  $s$ -ядро.

Обобщение значения Шепли на случай НТП-игр, а также  $n$ -ядра,  $k$ -ядра и других решений, опирающихся на понятие эксцесса, сталкивается уже с проблемами другого рода. Так, например, здесь нет столь же естественного, как в случае классических игр, определения понятия эксцесса, поэтому до сих пор вопрос о том, каким же должен быть эксцесс, остается нерешенным (см. по этому поводу Maschler, 1992; Печерский, 2000). Мы приведем здесь лишь определение аналога значения Шепли для игр без побочных платежей — так называемого  $\lambda$ -трансферабельного или (трансферабельного) значения Шепли. Оно было введено Л. Шепли в статье Shapley, 1969, следующим образом.

Пусть  $V$  — игра без побочных платежей. Подвергнем полезности игроков изменению масштабов измерения, а именно, умножим полезность каждого игрока  $i \in I$  на неотрицательный множитель  $\lambda_i$ . Далее постулируем: значением игры может быть такой и только такой вектор  $F(V)$ , который одновременно допустим, эффективен и справедлив для некоторых множителей  $\lambda_i^*$ ,  $i \in I$ . Это означает, что:

- (a)  $F(V) \in V(I)$ ;

- (b) вектор  $F(V) \times \lambda^* = (F_1(V)\lambda_1^*, \dots, F_n(V)\lambda_n^*)$  максимизирует суммарную полезность коалиции  $I$  в игре с побочными платежами с измененными масштабами полезностей;
- (с) вектор  $F(V) \times \lambda^*$  есть значение Шепли соответствующей игры с побочными платежами.

Так определенное  $\lambda$ -трансферабельное значение Шепли существует для достаточно широкого класса НТП-игр (см., например, Печерский, Соболев, 1983). Впрочем, здесь тоже возникает целый ряд проблем, связанных, например, с возможностью возникновения нулевых весов  $\lambda_i$  (см. по этому поводу Печерский, Яновская, 2000), где, кроме того, определен ряд других трансферабельных значений, и в частности трансферабельные значения наименьших квадратов, трансферабельное (пред-)  $n$ -ядро для НТП игр).

### 6.3. Нечеткие коалиции

В этом разделе мы рассмотрим понятия нечетких коалиций, нечетких кооперативных игр и сбалансированности.

Мы начнем с формального определения нечетких коалиций и нечетких кооперативных игр (с побочными платежами), а затем остановимся подробнее на различных интерпретациях нечетких коалиций. Пусть, как всегда,  $I = \{1, \dots, n\}$  — конечное множество игроков. Поскольку каждая коалиция  $S$  является подмножеством множества игроков  $I$ , то она может быть отождествлена с ее характеристическим вектором  $e^S \in \{1, 0\}^n$ , то есть

$$e_i^S = \begin{cases} 1, & i \in S \\ 0, & i \notin S. \end{cases}$$

Мы определяем нечеткую коалицию и нечеткие кооперативные игры, следуя Ж.-П. Обену (Aubin, 1979, 1981a,b). Нечеткая коалиция (то есть нечеткое подмножество (в смысле Л.Заде

(Zadeh, 1965) множества  $I$ ) — это вектор  $\tau \in [0, 1]^n$ . Число  $\tau_i$ , рассматривается как «степень участия» игрока  $i$  в  $\tau$ .

*Нечеткая кооперативная игра* — это положительно однородная функция  $V : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ , которая ставит в соответствие каждой нечеткой коалиции  $\tau$  ее выигрыш  $V(\tau)$ .

Как и в стандартном случае, функцию  $V$  будем называть характеристической функцией. Положительная однородность функции  $V$  означает, что  $V(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$  (ср.  $v(\emptyset) = 0$  в случае стандартных кооперативных игр) и  $V(\lambda \tau) = \lambda V(\tau)$  для  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Последнее предположение позволяет нам продолжить характеристическую функцию  $V$  с единичного куба  $[0, 1]^n$  на  $\mathbb{R}_+^n$ , полагая

$$V(\tau) = \left( \sum_{i \in I} \tau_i \right) V \left( \frac{\tau}{\sum_{i \in I} \tau_i} \right) \quad \text{для } \tau \neq \mathbf{0}.$$

Нечеткие кооперативные игры в различных контекстах изучались многими авторами (см., например, Васильев, 1984; Данилов, Сотсков, 1983; Экланд, 1983; Aubin, 1979, 1981a,b; Aumann, Shapley, 1974; Baudier, 1973; Billot, 1992; Owen, 1972; Pechersky, 1986; Rosenmueller, 1977; Shapley, Shubik, 1969 и др.).

(Безусловно, требование положительной однородности не является обязательным, однако семейство положительно однородных нечетких кооперативных игр само по себе достаточно обширно и представляет самостоятельный интерес.)

Введение в рассмотрение нечетких коалиций — это в некотором смысле попытка «убить двух зайцев»: с одной стороны, рассмотрение нечетких коалиций представляет собой один из возможных способов отказа от довольно жесткого условия участия игрока лишь в одной коалиции, а с другой — это один из возможных способов обхода трудностей, связанных с конечностью множества всех коалиций, структура которого очень бедна, что приводит к тому, что получающиеся результаты, по замечанию Обена, «либо тривиальны, либо очень сложны» (Обен, 1988).

Один из вариантов интерпретации следующий (см., например, Ауман, Шепли, 1974; Обен, 1988). Поскольку мы интерпретировали всякое подмножество множества  $I$  как коалицию игроков, то всякое нечеткое подмножество — своего рода идеализированное множество, заданное с помощью указания для каждой точки множества некоторого веса, значение которого лежит в промежутке между 0 и 1 и который означает «степень принадлежности» точки множеству — мы будем (в соответствии с определением) интерпретировать  $\tau$  как нечеткую коалицию игроков, а числа  $\tau_i$  — как степень участия (принадлежности) игрока  $i$  в коалиции  $\tau$ . Игрок полностью участвует в  $\tau$ , если  $\tau_i = 1$ , он совсем не участвует в ней, если  $\tau_i = 0$ , и он участвует в ней частично, если  $\tau_i \in (0, 1)$ . Так как множество нечетких коалиций  $[0, 1]^n$  представляет собой выпуклую оболочку множества обычных коалиций  $\{0, 1\}^n$ , то всякую нечеткую коалицию можно записать в виде

$$\tau = \sum_S \mu_S e^S, \quad \text{где} \quad \mu_S \geq 0, \sum_S \mu_S = 1.$$

Тогда степень участия игрока  $\tau_i$ ,  $i \in I$  определяется по формуле

$$\tau_i = \sum_{S: i \in S} \mu_S.$$

Следовательно, если  $\mu_S$  интерпретировать как вероятность того, что образуется коалиция  $S$ , то степень участия игрока  $i$  — это сумма вероятностей формирования коалиций  $S$ , которым  $i$  принадлежит.

Достаточно удачной представляется возможная интерпретация соответствующих компонент  $\tau_i$  как времени, то есть  $\tau_i$  — это то время, которое игрок  $i$  «готов трудиться» на коалицию  $\tau$ .

Перейдем теперь к обсуждению понятия сбалансированного набора коалиций (в духе Экланда), нечетких коалиций, определим каноническое представление стандартных кооперативных игр и рассмотрим еще одну полезную интерпретацию нечетких коалиций.

Предположим, что коалиции представляют своих участников (или интересы своих членов). Предположение, что каждый игрок является участником только одной коалиции, очень сильно. Обычно один и тот же индивид может участвовать в нескольких коалициях, организациях, принимать участие в различной деятельности, причем каждая такая коалиция «защищает» его интересы. Однако, если индивид  $i$  является участником одновременно двух коалиций, скажем,  $S_1$  и  $S_2$ , то он не может быть полностью представлен по отдельности ни коалицией  $S_1$ , ни коалицией  $S_2$ , поскольку каждая из этих коалиций считает его своим членом. (Далее, как и всегда, мы будем называть участников игроками). Иными словами, (см. Данилов, Сотсков, 1983) участник не обязан полностью включаться в одну коалицию, а может делить свою активность (и соответственно получать вознаграждение в виде каких-то результатов деятельности коалиций) между несколькими различными коалициями («играть несколько ролей»). Поставим в соответствие каждому игроку  $i$  и каждой из этих двух коалиций такую степень участия

$$\mu_{S_1}^i \geq 0, \mu_{S_2}^i \geq 0, \text{ что } \mu_{S_1}^i + \mu_{S_2}^i = 1.$$

Это равенство означает, что эти две коалиции полностью представляют  $i$ . Если  $\mu_{S_1}^i = 0$ , то  $i \notin S_1$ ; если же  $\mu_{S_1}^i = 1$ , то эта коалиция полностью представляет игрока  $i$ .

Предположим теперь, что  $\mu_{S_1}^i + \mu_{S_2}^i < 1$ . Это неравенство соответствует тому случаю, когда игрок  $i$  не представлен полностью этими двумя коалициями. Ясно, что этот подход может быть легко обобщен на случай более чем двух коалиций, а поэтому мы можем связать с каждой коалицией  $S$  семейство  $\{\mu_S^i\}_{i \in S}$  таких чисел  $\mu_S^i$ , что  $\mu_S^i$  есть степень участия игрока  $i$  в коалиции  $S$ .

Потребуем теперь, чтобы каждая коалиция представляла своих участников в равной степени, то есть чтобы выполнялось равенство  $\mu_S^i = \mu_S^j$  для всех  $i, j \in S$ . Это общее значение будем обозначать через  $\mu_S$ . Как отмечает А.Билло (Billot, 1992): «... ничто не дает нам повода для экономического

объяснения, почему агенты принадлежат к различным уровням принадлежности коалиции». (В этом смысле «временная» интерпретация степени участия приводит к тому, что разное время участия вызывает, так сказать, «распад» коалиции.) Таким образом, каждый игрок  $i$  «разделен» между коалициями и полностью представляется семейством  $\Xi$  коалиций  $S$ , если

$$\sum_{i \in S \in \Xi} \mu_S = 1.$$

Неравенство  $\sum \mu_S < 1$  означает, естественно, что игрок  $i$  лишь «частично» представлен семейством  $\Xi$ .

Ясно, что такое семейство коалиций  $\Xi$  и соответствующий набор чисел  $\{\mu_S\}_{S \in \Xi}$  определяет нечеткую коалицию  $\tau$  следующим образом:

$$\sum_{S: i \in S \in \Xi} \mu_S = \tau_i.$$

Более того, любая нечеткая коалиция  $\tau \in [0, 1]^n$  определяется некоторыми наборами  $\Xi$  и  $\{\mu_S\}_{S \in \Xi}$ , которые могут, разумеется, быть не единственными. Мы будем называть такие семейства *представляющими* семействами (для  $\tau$ ). Для любой коалиции  $S$  число  $\mu_S$  будет называться *уровнем реализуемости* коалиции  $S$ .

Пусть  $v$  — стандартная кооперативная игра с множеством игроков  $I = \{1, \dots, n\}$ . Определим *каноническое представление* игры  $v$  следующим образом. Представим себе, что:

- (1) если выигрыш (доля или дивиденды) игрока  $i$  в коалиции  $S \ni i$  есть  $t$ , то его выигрыш в той же коалиции с уровнем реализуемости  $\mu_S$ , равняется  $\mu_S t$ ;
- (2) каждый игрок получает выигрыши (дивиденды) от каждой коалиции, в которой он участвует.

Предположим теперь, что  $\{\Xi, (\mu_S)_{S \in \Xi}\}$  задано. Ясно, что суммарный выигрыш, который это семейство может гаранти-

ровать своим членам, есть

$$\sum_{S \in \Xi} \mu_S v(S).$$

*Каноническим представлением игры  $v$*  называется нечеткая кооперативная игра  $v^* : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , которая ставит в соответствие каждой нечеткой коалиции  $\tau$  максимальный суммарный выигрыш, который могут гарантировать представляющие ее семейства. Из определения и свойств (1), (2) сразу следует, что  $v^*$  определяется формулой

$$v^*(\tau) = \sup \left\{ \sum_S \mu_S v(S) : \mu_S \geq 0, \sum_S \mu_S e^S = \tau \right\}.$$

Нетрудно проверить, что функция  $v^*$  суперлинейна, то есть вогнута и положительно однородна. Мы еще вернемся к свойствам игры  $v^*$  ниже.

Эта функция, ее модификации и ее сужение на вершины единичного куба используются при рассмотрении проблем, связанных со сбалансированностью стандартных игр (см., например, Aubin, 1981a,b; Drissen, 1985; Ichiishi, 1993; Shapley, Shubik, 1969).

Нельзя обойти вниманием еще одну, возможно самую популярную, интерпретацию нечетких коалиций, по крайней мере в ситуации экономики обмена. Мы приведем эту интерпретацию, не ограничиваясь рамками собственно экономики обмена, а кратко дадим еще определения соответствующей игры рынка и ядра экономики.

Соответствующая экономическая ситуация такова (см., например, Экланд, 1983): каждый из  $n$  агентов характеризуется своей функцией полезности (предположение о том, что отношения предпочтения агентов представимы с помощью соответствующих функций полезности абсолютно не существенны в данном контексте), зависящей только от его набора товаров  $x^i \in \mathbb{R}_+^k$ , где  $k$  — число товаров, а  $i$  — номер агента, и обладает начальным набором товаров  $\omega^i \in \mathbb{R}_+^k$ . Общие ресурсы

в такой экономике (производства нет) определяются равенством  $\omega^1 + \dots + \omega^n = \Omega$ . Каждый из участников стремится максимизировать свою полезность за счет возможного обмена с другими участниками.

В экономике обмена коалиция  $S \subset I$  *блокирует* распределение  $(x^1, \dots, x^n)$ , если существует такой набор товаров  $y^i \in \mathbb{R}_+^k$ ,  $i \in S$ , что  $u_i(y^i) > u_i(x^i)$  для любого  $i \in S$ , и  $\sum_{i \in S} y^i = \sum_{i \in S} \omega^i$ . Распределение  $(x^1, \dots, x^n)$  называется допустимым, если  $\sum_{i \in I} x^i = \sum_{i \in I} \omega^i$ .

*Ядром экономики обмена* называется множество допустимых распределений, которые не блокируются никакой коалицией. Аналогия с  $c$ -ядром кооперативных игр очень сильная: любой экономике обмена можно поставить в соответствие кооперативную игру без побочных платежей таким образом, что ядро одной будет соответствовать  $c$ -ядру другой. Действительно, положим для любой коалиции  $S \neq \emptyset$ :

$$\begin{aligned} R(S) &= \{(y^i)_{i \in S} : y^i \in \mathbb{R}_+^k, i \in S \text{ и } \sum_{i \in S} y^i = \sum_{i \in S} \omega^i\}, \\ U(S) &= \{(u_i(y^i))_{i \in S} : (y^i)_{i \in S} \in R(S)\}. \end{aligned}$$

$R(S)$  — это множество перераспределений, которые может реализовать коалиция  $S$ . При  $S = I$  получаем  $R(I) = R$  — множество допустимых распределений. Множество  $U(S) \subset \mathbb{R}^I$  — множество векторов полезностей, которые коалиция  $S$  может гарантировать своим членам.

*Игрой рынка*, соответствующей экономике обмена, называется кооперативная игра без побочных платежей, определяемая формулой

$$V(S) = \hat{U}(S) - \mathbb{R}_+^S, \quad S \subset I,$$

где

$$\hat{U}(S) = \{x \in \mathbb{R}^S : (x_i^*)_{i \in S} = (u_i)_{i \in S} \text{ для некоторого } u \in U(S)\}.$$

Хорошо известно следующее предложение (см., например, Розенмюллер, 1974; Экланд, 1983), которое формализует отношение между ядром экономики и  $c$ -ядром соответствующей игры рынка.

**Предложение 6.3.1.** Если  $(x^1, \dots, x^n)$  принадлежит ядру экономики, то вектор  $(u_1(x^1), \dots, u_n(x^n))$  принадлежит  $s$ -ядру игры рынка. Если  $(v_1, \dots, v_n)$  принадлежит  $s$ -ядру игры рынка, то в ядре экономики найдется такое распределение  $(x^1, \dots, x^n)$ , что  $v_j \leq u_j(x^j)$  для всех  $j \in I$ .

**Следствие 6.3.1.** Ядро экономики обмена непусто тогда и только тогда, когда непусто  $s$ -ядро соответствующей ей игры рынка.

Понятие блокирования очевидным образом переносится с обычных коалиций на случай нечетких коалиций. А именно, говорят, что нечеткая коалиция блокирует распределение  $(x^1, \dots, x^n)$ , если существуют такие наборы товаров  $y^i \in \mathbb{R}_+^k$ ,  $i \in S$ , что

$$u_i(y^i) > u_i(x^i) \text{ для любого } i \in S$$

и

$$\sum_{i \in S} \tau_i y^i = \sum_{i \in S} \tau_i \omega^i,$$

где  $S$  — носитель коалиции  $\tau$ , то есть множество тех игроков  $i \in I$ , для которых  $\tau_i \neq 0$ .

*Нечетким ядром* экономики называется множество допустимых распределений, которые не блокируются никакими нечеткими коалициями.

Интерпретация нечетких коалиций (в контексте экономики обмена), о которой говорилось выше, состоит в следующем (см. Экланд, 1983). Представим себе общество  $I_m$ , построенное по образцу  $I$ , но содержащее в  $m$  раз больше индивидов: для каждого  $j \in I$  в этом обществе будет  $m$  участников типа  $j$ , то есть  $m$  участников, наделенных одной и той же функцией полезности  $u_j$  и таким же начальным ресурсом  $\omega^j$ . Любая коалиция  $A$  из  $I_m$  определяется заданием типов ее участников и числом участников каждого типа, то есть коалицией  $S$  из  $I$  и целыми числами  $a_{mj} \leq m$  для каждого  $j \in S$ . Тот факт, что коалиция  $A$  может гарантировать набор товаров

$y^j$  каждому из своих членов типа  $j$ , выражается равенством (в котором левая и правая часть поделены на  $m$ )

$$\sum_{j \in S} \frac{a_{mj}}{m} y^j = \sum_{j \in S} \frac{a_{mj}}{m} \omega^j,$$

или, если положить  $a_{mj}/m = \tau_j$ , равенством

$$\sum_{j \in S} \tau_j y^j = \sum_{j \in S} \tau_j \omega^j.$$

Пусть каждый участник типа  $j$  имеет набор товаров  $x^i \in \mathbb{R}_+^I$ , тогда этот набор блокируется коалицией  $A$ , если найдется такое распределение  $y$ , что

$$u_j(y^j) > u_j(x^j) \text{ для любого } j \in S.$$

Таким образом, если принять во внимание то, что вещественные числа можно сколь угодно точно аппроксимировать рациональными, мы можем выбрать целые числа  $a_{mj}$  так, что при  $m \rightarrow +\infty$  мы будем получать желаемую аппроксимацию для любых  $\tau_j$ . В этом смысле можно сказать, что нечеткие коалиции представляют собой коалиции в экономике, аналогичной первоначальной экономике, но с очень большим числом индивидов.

Наконец, определение нечеткого ядра формулируется следующим образом (мы используем положительную однородность функции  $V$ ).

*$C$ -ядром нечеткой кооперативной игры  $V$  (или нечетким  $s$ -ядром игры  $V$ ) называется множество*

$$\begin{aligned} C(V) &= \{x \in \mathbb{R}^I : x_1 + \dots + x_n = V(e), \\ x\tau &\geq V(\tau) \text{ для всех } \tau \in \mathbb{R}_+^I\}, \end{aligned}$$

где  $e = (1, \dots, 1)$ .

Предположим теперь, что  $v$  — стандартная кооперативная игра. Непосредственно из определений следует, что эта игра

сбалансирована, если  $v(I) = v^*(e)$ . Она *вполне сбалансирована*, или *тотально сбалансирована* (то есть сбалансирована любая ее под-игра с множеством игроков  $S \subset I$ , определяемая сужением исходной игры на  $S$ ), если  $v(S) = v^*(e^S)$  для всех  $S$ . Конечно же,  $v(S) \leq v^*(e^S)$  для любой  $S$ . Функция  $v^*$  является наименьшей суперлинейной (то есть вогнутой и положительно однородной) функцией, большей чем дискретная функция  $v$ .

Как уже отмечалось в разделе 6.1, следующее предложение хорошо известно (см. Бондарева, 1963; Shapley, 1967; Aubin, 1981a).

**Теорема 6.3.1.**  *$C$ -ядро  $C(v)$  (стандартной) кооперативной игры  $v$  непусто тогда и только тогда, когда  $v$  сбалансирована. В этом случае  $C(v) = C(v^*)$ .*

Мы приведем здесь набросок доказательства этой теоремы. Как мы отмечали только что, сбалансированность означает, что  $v(I) = v^*(e)$ .

Если  $V$  — суперлинейная нечеткая игра, то (см. Aubin, 1981a) ее  $c$ -ядро совпадает с супердифференциалом  $\partial V(e)$  функции  $V$  в точке  $e = (1, \dots, 1)$ , то есть

$$C(V) = \partial V(e),$$

причем супердифференциал вогнутой функции  $f$  в точке  $\tau$  определяется формулой

$$\partial f(\tau) = \{x \in \mathbf{R}^n : f(\tau) - f(t) \geq (x, \tau - t), \forall t \in \mathbf{R}^n\}.$$

Поскольку очевидно, что  $C(v^*) \subset C(v)$  (так как в нечетком случае просто больше ограничений или они более сильные, т. к.  $v(S) \leq v^*(e^S)$ ), то из непустоты супердифференциала вогнутой функции следует непустота  $C(v^*)$ .

Пусть  $v$  — стандартная игра. Множество

$$A(v) = \{x \in \mathbf{R}^I : x(S) \geq v(S), \forall S \subset I\}$$

называется (см. Aubin, 1981a; Sharkey, 1981) множеством приемлемых векторов (или приемлемых исходов), или просто *приемлемым множеством*.

Для нечеткой кооперативной игры  $V$  приемлемое множество  $A(V)$  определяется аналогично:

$$A(V) = \{x \in \mathbf{R}^I : x\tau \geq v(\tau), \forall \tau \in [0, 1]^n\}.$$

Очевидно (см. Рокафеллер, 1973; Aubin, 1981a,b), что нижняя опорная функция  $p$  множества  $A(v)$ , определяемая равенством

$$p_{A(v)}(\tau) = \inf \{(x, \tau) : x \in A(v)\},$$

совпадает с функцией  $v^*$ . Более того,  $p_{A(v)}(\tau) = p_{A(v^*)}(\tau)$ , а следовательно,  $A(v) = A(v^*)$ . Ясно, что  $A(v)$  — непустое, замкнутое, выпуклое множество. Оно  $\mathbf{R}_+^n$  — устойчиво, то есть  $A(v) = A(v) + \mathbf{R}_+^n$ .

Супердифференциация  $\partial v^*(e)$  есть множество тех точек  $x$  множества  $A(v^*) = A(v)$ , для которых  $xe = v^*(e) = v(e)$ . А это и есть как раз  $c$ -ядро (или нечетное  $c$ -ядро), т.е.  $C(v) = C(v^*)$ .

**Замечание 6.3.1.** Нетрудно заметить, что если игра тотально сбалансирована, то нечетная игра  $v^*$  является продолжением стандартной кооперативной игры  $v$  с вершин единичного куба на весь куб. Существуют и другие варианты продолжения игры  $v$  на куб. Так, например, хорошо известно мультилинейное расширение Оуэна (Owen, 1972), определяемое для игры  $v$  следующим образом:

$$\tilde{v}(\tau) = \sum_S p_S(\tau) v(S),$$

где  $p_S(\tau) = \prod_{i \in S} \tau_i \prod_{i \in I \setminus S} (1 - \tau_i)$ . Интересно, что при этом вектор Шепли оказывается равным интегралу от градиента функции  $v$  по главной диагонали куба  $[0, 1]^n$ .

**Замечание 6.3.2.** *Необходимо упомянуть еще одно обобщение кооперативных игр, связанное с рассмотрением бесконечных множеств игроков. Игры с континуумом участников используются, в частности, для моделирования ситуаций с очень большим числом участников (см. например, Ауман, Шепли, 1977).*

## 6.4. Приложения кооперативных игр

Многочисленность различных экономических приложений кооперативных игр во многом связана, например, с тем, что многие решения, имеющие общественную значимость, вряд ли могут приниматься на основе рыночных механизмов, ибо не будут в достаточной мере использоваться кооперативные возможности, что может приводить к неэффективности при самостоятельных действиях агентов. Простейшим примером здесь может служить производство публичных продуктов (общественных благ или продуктов общественного потребления — public goods). Чтобы исправить эти недостатки рыночных механизмов, предлагается множество нормативных решений, которые представляются уместными в различных ситуациях принятия решений.

Прежде чем остановиться подробнее на приложениях кооперативных игр, мы приведем определение согласованности решений кооперативных игр, которое играет очень важную роль в современных исследованиях кооперативных игр и их приложений и которые нельзя не упомянуть даже в столь кратком курсе. Мы кратко опишем здесь свойство согласованности в достаточно общей форме (подробный обзор результатов, касающихся этой проблематики можно найти в работе В. Томсона (Thomson, 1996)). Пусть  $M$  — бесконечное множество «потенциальных» агентов. Мы считаем, что  $M = \mathbb{N}$ , где  $\mathbb{N}$  — множество натуральных чисел. Пусть  $\Xi$  — семейство всех конечных подмножеств множества  $\mathbb{N}$ , элементы которого мы будем обозначать  $N, N', N'', \dots$ . Для любой груп-

пы  $N \in \Xi$  обозначим через  $X^N$  множество альтернатив, доступных группе  $N$ , из которого группа должна осуществить свой выбор. Пусть  $D^N$  — семейство всех возможных задач, с которыми могут столкнуться члены  $N$ . Каждый элемент  $D^N$  задается допустимым множеством, то есть некоторым подмножеством  $X^N$ , удовлетворяющим каким-либо условиям, а также данными, описывающими окружающую обстановку, включающими, как правило, предпочтения участников на допустимом множестве.

Для данной группы  $N \in \Xi$  и задачи  $D \in D^N$  мы хотим определить, какую допустимую альтернативу из  $D$  группа  $N$  выберет как компромисс или, в зависимости от интерпретации, какую альтернативу из  $D$  будет рекомендовать им беспристрастный арбитр.

Обозначим  $E = \bigcup_{N \in \Xi} D^N$  и  $X = \bigcup_{N \in \Xi} X^N$ .

*Решением* на  $E$  называется функция  $\varphi : E \rightarrow X$ , которая ставит в соответствие каждому  $N \in \Xi$  и  $D \in D^N$  альтернативу (или множество альтернатив, если говорить о многозначном решении) из допустимого множества  $D$ . Эта альтернатива обозначается через  $\varphi(D)$  и называется решением  $D$ .

Неформально свойство согласованности<sup>14</sup> можно описать следующим образом. Решение будет обладать свойством согласованности, если для любой задачи, с которой сталкивается некоторая группа  $N$ , всякий раз, когда оно (решение) будет рекомендовать некоторый исход  $x$  в качестве решения этой задачи, оно будет любой подгруппе  $N' \subset N$  рекомендовать сужение  $x$  на  $N'$  в качестве решения «редуцированной задачи», с которой сталкивается  $N'$ , то есть задачи, возникающей из исходной задачи, если участникам дополнения  $N \setminus N'$  «атрибутировать» их компоненты  $x$ . (Здесь, конечно, нужно иметь в виду, что решение должно быть разложимым в том смысле, что можно говорить о соответствующих компонентах.)

Для формального описания согласованности нам понадобится понятие редуцированной задачи. Пусть  $N, N' \in \Xi$ ,  $N' \subset$

---

<sup>14</sup>Consistency.

$N, D \in D^N, x \in D$ . Редуцированной задачей  $D$  относительно  $N'$  и  $x$  является задача, состоящая из тех альтернатив из  $D$ , для которых все компоненты, соответствующие дополнению  $N \setminus N'$ , являются соответственными компонентами  $x$ . Такую задачу мы будем обозначать через  $r(D, N', x)$ .

Решение  $\varphi : E \rightarrow X$  удовлетворяет свойству согласованности (а в случае кооперативных игр часто говорят также о свойстве редуцируемости или свойстве редуцированной игры — reduced game property), если имеет место следующее свойство. Если для всех групп  $N, N' \in \Xi$ , таких что  $N' \subset N$ , и всех задач  $D \in D^N$  через  $x$  обозначить решение  $D$ , то  $x|_N$  является решением редуцированной задачи  $D$  относительно  $N'$  и  $x$ , если редуцированная задача лежит в  $D^{N'}$ : для любых  $N, N' \in \Xi$ , таких что  $N' \subset N$ , для любой задачи  $D \in D^N$  и для любого  $x \in D$

$$x = \varphi(D), r(D, N', x) \in D^{N'} \implies x|_{N'} = \varphi(D, N', x).$$

Если, например,  $v$  — кооперативная игра с множеством игроков  $I$ , то редуцированная игра может быть определена различными способами. Скажем, по Дэвису-Машлеру, редуцированная на  $S$  в  $x$  игра  $(S, v_S^x)$  определяется следующим образом (см., например, Maschler, 1992):

$$\begin{aligned} v_S^x(S) &= x(S), \\ v_S^x(T) &= \max_{Q \subset I \setminus S} [v(T \cup Q) - x(Q)], \quad \emptyset \neq T \subset S, \quad T \neq S. \end{aligned}$$

Это определение служит основой для широкого спектра модификаций понятия согласованности. Так, например, существенную роль играет не только свойство согласованности, но и так называемое свойство обратной согласованности, которое имеет дело с «двойственной операцией»: желательность какого-то исхода для некоторой задачи выводится из желательности его сужения на все подгруппы, состоящие из двух участников, для редуцированных задач, с которыми сталкиваются эти подгруппы. Формально говоря, решение  $\varphi$  удовлетворяет свойству обратной согласованности, если для любой

группы  $N \in \Xi$ , любой задачи  $D \in D^N$  и любого допустимого  $x \in D$  выполняется следующее условие: если для любой группы  $N' \subset N$  такой, что  $|N'| = 2$ ,  $r(D, N', x) \in D^{N'}$  и  $x|_{N'} = \varphi(D, N', x)$ , то  $x = \varphi(D)$ .

Именно на согласованности или на свойстве редуцированности основаны многочисленные системы аксиом, определяющие  $c$ -ядро,  $n$ -ядро,  $k$ -ядро и т. д. (см., например, Соболев, 1975; Maschler, 1992; Peleg, 1992 и др.).

Как уже говорилось, спектр приложений кооперативных игр в настоящее время огромен и перечислить все известные к настоящему моменту приложения просто невозможно, тем более, что он постоянно расширяется. Поэтому мы ограничимся здесь лишь кратким перечислением некоторых из них, не давая подробных комментариев и не указывая на различные подходы к исследованию соответствующих моделей. Более того, мы укажем лишь те модели, формулировки которых не требуют больших формальностей.

По-видимому, начать это перечисление следует с общего экономического равновесия. Классические результаты о совпадении равновесия, ядра и значения в больших экономиках, о совпадении множества равновесий по Вальрасу с нечетким ядром экономики обмена, о связи ядра экономики обмена с  $c$ -ядром соответствующей игры рынка (см. раздел 6.3) давно уже занимают важное место в экономической литературе (см., например, Ауман, Шепли, 1977; Васильев, 1984; Гильденбранд, 1986; Розенмюллер, 1974; Экланд, 1983; Aubin, 1979; Mas-Colell, Whinston, Green, 1995 и др.).

Один из важнейших классов приложений составляют задачи распределения затрат, прибыли. Мы подробно рассмотрим задачи этого типа в гл. 7, поэтому здесь мы достаточно кратко упомянем лишь постановку задач, для моделирования которых используются относительно простые кооперативные игры. К простейшим кооперативным играм относятся аксиоматические задачи торга или арбитражные схемы, которые мы упоминали в разделе 6.2. При всей простоте своего опре-

деления, аксиоматические модели торга — это весьма существенный и наиболее продвинутый инструмент исследования в теории благосостояния (см., например, Мулен, 1991). Они нашли также свое применение и в теории фирмы, и в теории организации промышленности, скажем, при рассмотрении взаимоотношений между поставщиком и покупателем (см., например, Tirole, 1988).

Начнем с приложений, связанных с проблемами банкротства и налогообложения. Задачи, возникающие в этом контексте, можно сформулировать следующим образом. Задача банкротства (см., например, Thomson, 1996) — это пара  $(c, E) \in \mathbb{R}_+^I \times \mathbb{R}_+$ , такая что  $\sum_{i \in I} c_i \geq E$ , где  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  — множество претендентов на собственный капитал  $E$  (то есть стоимость имущества за вычетом обязательств) обанкротившейся фирмы, а  $c_i$  — требование  $i$ -го претендента. Задачи банкротства рассматривались, например, в работах Aumann, Maschler, 1985; Chun, 1988; Chun, Thomson, 1990; Dagan, Volij, 1993; Thomson, 1995 и других. (См. также пример 6 в разделе 6.1).

Если по-другому интерпретировать соответствующую пару в  $\mathbb{R}_+^I \times \mathbb{R}_+$ , то мы приходим к задаче налогообложения. А именно, задача налогообложения — это пара  $(w, T) \in \mathbb{R}_+^I \times \mathbb{R}_+$ , причем  $\sum_{i \in I} w_i \geq T$ ;  $I$  — это множество налогоплательщиков,  $w_i$  — доход  $i$ -го агента, а  $T$  — затраты, которые должны быть покрыты за счет налогов. Задачам налогообложения посвящены, например, работы Young, 1986, 1987, 1988, 1994.

С задачей налогообложения тесно связана и задача распределения прибыли. Задача такого типа — это пара  $(w, S) \in \mathbb{R}_+^I \times \mathbb{R}_+$ , где  $w_i$  — инвестиции агента  $i$  в совместное предприятие, а  $S > 0$  — прибыль, приносимая этим предприятием (см. Moulin, 1985a; Herrero, Maschler, Villar, 1995).

В достаточно общей постановке задачу распределения затрат можно кратко сформулировать следующим образом. Группа агентов (это могут быть фирмы, государства,

какие-либо организации) хочет реализовать некий проект, реализация которого дает возможность обеспечивать участников некоторым специфическим продуктом (это может быть, к примеру, здание, шоссе, дамба, аэропорт, электростанция, телефонная станция и т.п.) Каким образом следовало бы распределить затраты между участниками этого проекта? Здесь необходимо отметить, что некоторые понятия, играющие важную роль в теории кооперативных игр и ее приложениях, возникли до того, как сформировался концептуальный аппарат кооперативных игр. Так, например, понятие  $s$ -ядра, как уже отмечалось, было введено Джиллисом (Gillies, 1959), но его аналог, по существу, рассматривался уже в конце 30-х годов при изучении проблемы распределения затрат между участниками проекта, связанного с развитием бассейна реки Теннесси. Уже в процессе работы над этим проектом был сформулирован так называемый принцип отсутствия субсидий, утверждающий, что никакая группа потребителей не должна платить меньше, чем дополнительные затраты на ее обслуживание (то есть разница в затратах с учетом этой коалиции и без нее). См. по этому поводу обзор Straffin, Heaney, 1981; Driessen, 1988.

Формально задача распределения затрат может быть сформулирована следующим образом. Пусть  $C : \{0, 1\}^I \rightarrow \mathbb{R}_+$ , где  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , неубывающая функция затрат,  $C(0) = 0$  и  $\mathbf{C}$  — пространство всех таких функций затрат. Решением является отображение  $\varphi : C \in \mathbf{C} \rightarrow \varphi(C) \in \mathbb{R}_+^I$  так что  $\varphi_1(C) + \varphi_2(C) + \dots + \varphi_n(C) = C(e)$ , где  $e = (1, 1, \dots, 1)$ .

Эту задачу можно сформулировать в еще более общей форме (см., например, Moulin, 1996). А именно, предположим, что  $C : \mathbb{R}_+^I \rightarrow \mathbb{R}_+$ , причем вектор  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^I$  интерпретируется как вектор спроса агентов на продукт (услугу), а продукт производится в соответствии с технологией, которая описывается функцией затрат  $C$ . В этом случае решением

является отображение  $\varphi : \mathbf{C} \times \mathbb{R}_+^I \rightarrow \varphi(C, x) \in \mathbb{R}_+^I$ , так что

$$\varphi_1(C, x) + \varphi_2(C, x) + \cdots + \varphi_n(C, x) = C(x_1, \dots, x_n).$$

Такое обобщение не только расширяет спектр приложений, но и, что на наш взгляд представляется также достаточно интересным, дает еще один важный довод в пользу необходимости рассмотрения кооперативных игр общего вида (например, нечетких или обобщенных кооперативных игр). Обсуждение различных способов распределения затрат можно найти, например, в работе Moulin, Shenker, 1994.

Исследование многопродуктового случая началось с работы Колпина (Kolpin, 1994), который предложил характеристику обобщения так называемого серийного метода распределения затрат. (При серийном методе агент 1 платит  $1/n$ -ю часть затрат, необходимых для производства  $nd_1$ . Агент 2 платит  $1/(n-1)$ -ю часть разности между затратами на производство  $d_1 + (n-1)d_2$  и тем, что заплатил агент 1, и т.д.). Вербально метод Колпина состоит в следующем: каждой коалиции потребителей сопоставляется некоторое имплицитное «социальное бремя» (затраты на производство), которое было бы результатом, если бы спрос общества в целом «отражал» бы спрос членов этой коалиции; это отправное бремя используется для вычисления тех прав, которые коалиции имеют по отношению к защите от «затрат»; эти права имеют приоритеты, и коалиция, обладающая высшим приоритетом, распределяет свое бремя равномерно между своими членами; оставшиеся затраты распределяются между оставшимися агентами последовательным применением этого правила.

В этом же контексте необходимо упомянуть задачи ценообразования. Формальная модель такова. Предположим, что  $I$  — множество товаров (commodities). Для данного  $\alpha \in \mathbb{R}_+^I$ , интерпретируемого как вектор максимального выпуска, определена функция затрат  $C : \{x \in \mathbb{R}_+^I : x \leq \alpha\} \rightarrow \mathbb{R}^1$ , такая что  $C(\mathbf{0}) = 0$ . Число  $C(x)$  интерпретируется как затраты на производство вектора выпуска  $x$ .

Механизм ценообразования — это функция  $\varphi$ , которая ставит в соответствие каждой задаче ценообразования  $(C, \alpha)$  вектор  $P(C, \alpha) \in \mathbb{R}^I$ . Примерами таких механизмов являются механизм Шепли и механизм Аумана-Шепли. Первый назначает вектор цен,  $i$ -я координата которого есть

$$Sh_i^*(C, \alpha) = \frac{Sh_i(v_{(C, \alpha)})}{\alpha_i},$$

где  $Sh(\cdot)$  — значение кооперативной игры, определяемой формулой  $v_{(C, \alpha)}(S) = C(\mathbf{0}^{I \setminus S}, \alpha^S)$ .

Если ограничиться задачами, в которых функции затрат бесконечно дифференцируемы и таковы, что существует интеграл  $\int_0^1 C(t\alpha)dt$ , то можно определить механизм Аумана-Шепли, который назначает вектор цен так, что его  $i$ -я координата есть  $\int_0^1 C_i(t\alpha)dt$ , где  $C_i$  — частная производная по  $i$ -й координате. Обзор литературы, посвященной анализу этой модели можно найти в работе Я. Таумана (Tauman, 1988).

Поскольку речь здесь идет о ценообразовании, то уместно было бы упомянуть столь важный класс приложений кооперативных игр, как проблема ценообразования в регулируемой монополии. Понятие регулируемой монополии возникло в связи с двумя противоположными тенденциями, возникающими в случае, если технология производства обладает свойствами возрастающей отдачи от масштабов производства. В этом случае технологически выгодно слияние производств в одно крупное производство, в результате чего появляется монополия. В. Баумоль, Дж. Пансар и Р. Виллиг определяют отрасль как естественную монополию, если в определенных пределах выпуска функция затрат субаддитивна (Baumol, Panzar, Willig, 1982). Это определение правильно для хорошо информированного плановика, то есть плановика, которому точно известна функция затрат. У плановика нет причин для того, чтобы иметь несколько фирм, производящих продукцию, когда весь выпуск может быть более дешевым способом осуществлен одной фирмой (см. Tirole, 1988). Однако с усилением

монополизации в отрасли перестает работать механизм конкуренции. В этой ситуации возможны два способа: либо искусственно сдерживать монополизацию, либо отдать отрасль на откуп монополии, но в этом случае отобрать у нее право ценообразования. Так возникает регулируемая монополия: государство не вмешивается в технологические проблемы, но в его руках находится ценообразование.

Традиционные подходы к проблемам регулируемой монополии следуют традициям теории конкурентного рыночного равновесия. В случае публичного блага мы приходим к равновесию по Линдалю, когда каждый агент имеет свою персональную цену публичного продукта и при этих персональных ценах спрос на этот публичный продукт одинаков. В случае индивидуального продукта (продукта индивидуального потребления — *private good*) это приводит к правилам предельного (маргинального) ценообразования.

Кооперативная теория приводит к различным типам решений, связанных с проблемами регулируемой монополии. В их числе методы, включающие методы ценообразования, основанные на предельной полезности: равновесие по Линдалю и долевое равновесие, обобщающее равновесие по Линдалю для модели с общественным продуктом, а также конкурентное равновесие, в котором каждый агент владеет одной и той же долей общественной фирмы в модели с индивидуальным продуктом. Проблемы, связанные с регулируемой монополией, обсуждаются в книге Мулена (1991).

Следующий класс проблем, интерес к которым в последнее время постоянно возрастает — это экономические модели справедливого распределения. Упомянем здесь три модели: модель, в которой агенты имеют классические предпочтения на  $n$ -мерном пространстве товаров, модель с единственным товаром и «однопиковыми» предпочтениями агентов и, наконец, модель с неделимыми товарами.

Начнем с распределения «социального фонда» ресурсов<sup>15</sup> между агентами с равными правами на них (например, распределение долей между группой наследников). Предположим, что есть  $k$  товаров и группа агентов  $I$ . Предпочтения каждого агента  $i \in I$  описываются некоторым отношением предпочтения  $R_i$  на  $\mathbb{R}_+^k$ . (Как правило, эти предпочтения предполагаются непрерывными, выпуклыми и монотонными.) Есть также социальный фонд  $\Omega \in \mathbb{R}_+^k$ . Задача справедливого распределения — это пара  $(R, \Omega)$ , причем эту модель следует отличать от стандартной модели, в которой каждый агент изначально имеет некоторое распределение товаров или ресурсов общества.

Указанную модель можно обогатить, если ввести возможность производства, при этом возникает множество разнообразных решений. Среди работ, посвященных этим моделям, следует указать работы Thomson, 1988, 1992; Fleurbaey, 1995; Fleurbaey, Maniquet, 1994 и Maniquet, 1996. Причем здесь любопытно отметить, что проблемы согласованности рассматриваются в этих моделях не только в связи с возможностью варьирования числа агентов, но и варьированием числа товаров, с соответствующей переформулировкой свойств согласованности решений (см., Roemer, 1986a, 1986b).

Задачу справедливого распределения в экономике с «однотиповыми» предпочтениями мы проиллюстрируем на следующем примере (см. Thomson, 1994). Представим себе, что для выполнения некой работы формируется группа из трех работников, при этом суммарно потребуется  $T$  часов работы. Каждый работник получает фиксированную почасовую оплату, а его «неудовольствие» от работы является вогнутой функцией от отработанного им времени. Как результат его полезность является вогнутой функцией от предлагаемого им труда. Каким образом работу следует распределить между этими тремя работниками, если помимо эффективности нас волнует еще и «справедливость». Исследованиям моделей этого типа посвя-

---

<sup>15</sup>Social endowment.

щены работы Thomson, 1994; Sonmez, 1994; Dagan, 1996 и др.

Задачу справедливого распределения в ситуации с неделимыми товарами в простейшей форме можно представить следующим образом. Есть три задания, на выполнение которых следует назначить трех работников одинаковой квалификации. Задания не являются идентичными, и предпочтения работников относительно сочетаний «работа — заработная плата» различны. Заработная плата может быть выбрана так, чтобы компенсировать агентов в случае назначения их на менее желательную работу, причем суммарная заработная плата должна находиться в рамках некоторого определенного бюджета. Каким образом следовало бы назначить работников для выполнения этих заданий и какова должна была бы быть их заработная плата? Решение задач этого типа обсуждается в работах Tadenuma, Thomson, 1991, 1993, 1995; Aragones, 1995 и др.

Конечно же, невозможно перечислить все известные к настоящему времени приложения теории кооперативных игр и тем более пытаться подробно описать каждое из них. Однако представляется, что даже приведенный список моделей демонстрирует то обширное многообразие возможных приложений теории кооперативных игр.

В заключение отметим еще несколько, на наш взгляд, важных моментов. Так, например, чрезвычайно интересный подход к изучению природы фирмы, базирующийся на теории кооперативных игр, исследован Т. Ихиши в монографии Ichiishi, 1993.

Наконец мы опишем несколько хорошо известных моделей, формулировка которых использует игры без побочных платежей.

Один из классических примеров — игру рынка, мы уже упоминали выше. Рассмотрим теперь другую модель — модель с производством (Boehm, 1974).

Экономика с производством описывается набором

$$E_p = (\{X^j, u^j, w^j\}_{j \in I}, \{Y(S)\}_{S \subset I}),$$

где  $X^j \subset \mathbb{R}^k$  — потребительское множество,  $u^j : X^j \rightarrow \mathbb{R}$  — функция полезности,  $w^j \in \mathbb{R}^k$  — начальный ресурс агента

$j \in I$ , а  $Y(S)$  — технологическое множество каждой из коалиций  $S$ . Если в данной экономике не вводится никаких механизмов, то кооперативное поведение агентов в  $E_p$  можно моделировать с помощью НТП-игры  $V$ , определяемой следующим образом:

$$V(S) = \{u \in \mathbb{R}^I \mid \exists \{x^j\}_{j \in S} \in \prod_{j \in S} X^j : \exists y \in Y(S) : \sum_{j \in S} x^j \leq \sum_{j \in S} w^j + y \text{ и } \forall j \in S \ u_j \leq u^j(x^j)\}. \quad (4.1)$$

Если каждое из множеств  $X^j$  выпукло, каждая функция  $u^j$  квазивогнута, а технология сбалансирована, то есть для каждого сбалансированного семейства коалиций  $B$  с соответствующими весами  $\{\lambda_S\}_{S \in B}$  имеет место включение

$$\sum_{S \in B} \lambda_S V(S) \subset V(I),$$

то игра  $V$  сбалансирована, а значит (см. например, Scarf, 1957; Ichiishi, 1992),  $s$ -ядро этой игры непусто.

Следующий пример взят из Champsaur (1975). Рассмотрим экономику с производством с одним первичным продуктом, одним конечным продуктом и конечным множеством  $I$  экономических агентов. Все коалиции  $S \subset I$  являются потенциальными производственными единицами и могут производить в соответствии с производственной функцией  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , которая предполагается строго возрастающей. Конечный продукт является публичным, а первичный продукт — индивидуальным. Функция полезности каждого агента  $u^j : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$  зависит от потребления и первичного продукта, и конечного продукта (можно рассматривать, скажем, в качестве индивидуального продукта деньги, а значит, полезность агента зависит от имеющейся у него суммы денег и количества публичного продукта, которое он может потребить) и является неубывающей функцией. Предположим, кроме того, что

$w^j \in \mathbb{R}_+$  — начальный запас (ресурс) первичного продукта у агента  $j$ . В экономике нет начального запаса публичного продукта. Соответствующая игра без побочных платежей  $V$  определяется следующим образом:

$$V(S) = \left\{ u \in \mathbb{R}^I \mid \exists \{x^j\}_{j \in S} \in \mathbb{R}^S : \sum_{j \in S} x^j \leq \sum_{j \in S} w^j, \right. \\ \left. \forall j \in S : u_j \leq u^j(x^j, g(\sum_{j \in S} w^j - \sum_{j \in S} x^j)) \right\}.$$

Модель, приводимая ниже (см. Ichiishi, 1993), по существу аналогична предыдущей, но теперь, чтобы сделать «бесплатный проезд» (free ride) «платным» (costly ride), смягчая тем самым классическую проблему, возникающую при производстве публичных продуктов, когда каждый из агентов, принимающих участие в производстве публичного продукта, старается «недовложить» в его производство, пользуясь при этом произведенным *всеми* агентами продуктом, в модель вводится «контролирующий орган». Предположим, что коалиция  $S$  предполагает выйти из коалиции  $I$ , если последняя решает использовать набор  $x^\wedge$  индивидуальных продуктов. Поскольку участники коалиции  $S$  могут «бесплатно» пользоваться количеством  $g(\sum_{j \in I \setminus S} (w^j - x^j))$  публичного продукта, произведенного коалицией  $I \setminus S$ , то контрольный орган вынуждает коалицию  $S$  осуществить передачу доли  $\alpha \sum_{j \in I \setminus S} (w^j - x^j)$  затрат коалиции  $I \setminus S$ , где налоговая ставка  $\alpha \in [0, 1]$  установлена заранее. Предположим, что функции полезностей агентов неубывающие и квазивогнутые, а функция  $g$  вогнута. Игра без побочных платежей, параметризованная  $x^\wedge$ , определяется следующим образом:

$$V(S) = \left\{ u \in \mathbb{R}^I \mid \exists \{x^j\}_{j \in S} \in \mathbb{R}^S : \right. \\ \left. \sum_{j \in S} x^j \leq \sum_{j \in S} w^j - \alpha \sum_{j \in I \setminus S} (w^j - x^j), \right.$$

$$\forall j \in S : u_j \leq w^j(x^j, g(\sum_{j \in S} w^j - \sum_{j \in S} x^j)) + \\ + g(\sum_{j \in S} w^j - \alpha \sum_{j \in I \setminus S} (w^j - x^j) - \sum_{j \in S} x^j)) \Bigg\}.$$

### 6.5. Дополнение. Существование и единственность вектора Шепли

Мы докажем здесь без особых подробностей существование и единственность значения Шепли (более подробно см., например, Воробьев, 1995).

Найдем сначала вектор Шепли для характеристической функции вида  $cv_R$ , где  $c > 0$ , а  $v_R$  — простейшая характеристическая функция, т.е. функция вида

$$v_R(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } S \supset R, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Легко видеть, что число различных простейших характеристических функций на  $I$  равно  $2^n - 1$ , т.е. числу непустых коалиций. Следующие два предложения мы приведем без доказательств.

**Предложение 6.5.1.** *Все  $2^n - 1$  простейших характеристических функций на  $I$  линейно независимы.*

**Предложение 6.5.2.** *Для любой характеристической функции  $v$  имеет место единственное представление*

$$v = \sum_{R \subset I} \lambda_R(v) v_R,$$

где

$$\lambda_R(v) = \sum_{S \subset R} (-1)^{|R|-|S|} v(S).$$

Иными словами, это предложение утверждает, что каждую характеристическую функцию на  $J$  можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации простейших характеристических функций.

**Теорема 6.5.1.** *Если  $v_R$  — простейшая характеристическая функция, то*

$$\Phi_i(cv_R) = \begin{cases} \frac{c}{|R|} & \text{если } i \in R, \\ 0, & \text{если } i \notin R. \end{cases} \quad (5.1)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Множество  $R$  является для  $cv_R$  носителем. Поэтому по аксиоме эффективности:

$$\sum_{i \in R} \Phi_i(cv_R) = cv_R(R) = c. \quad (5.2)$$

Ясно также, что перестановка любых двух игроков из  $R$  не меняет значения характеристической функции  $cv_R$ . Поэтому по аксиоме симметрии слева в (5.2) все слагаемые равны друг другу, и мы получаем верхнюю строку (5.1). Наконец, все игроки, не входящие в  $R$ , являются в  $cv_R$  болванами, и это дает нам нижнюю строку (5.1).

**Следствие 6.5.1.** *Для простейшей характеристической функции  $v_R$  и  $c > 0$   $\Phi(cv_R) = c\Phi(v_R)$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о** следует непосредственно из (5.1).

Из аксиомы линейности и последнего следствия вытекает, что при любых  $c_R \geq 0$  должно быть

$$\Phi\left(\sum_R c_R v_R\right) = \sum_R \Phi(c_R v_R) = \sum_R c_R \Phi(v_R). \quad (5.3)$$

Распространим эту формулу на случай коэффициентов  $c_R$  с произвольными знаками.

**Лемма 6.5.1.** *Если  $v'$  и  $v''$  – характеристические функции, а их разность  $v' - v''$  также является характеристической функцией, то*

$$\Phi(v' - v'') = \Phi(v') - \Phi(v''). \quad (5.4)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** По условию мы имеем тождественно  $v' = v'' + (v' - v'')$ . Справа здесь стоит сумма двух характеристических функций, и по аксиоме линейности мы имеем

$$\Phi(v') = \Phi(v'') + \Phi(v' - v''),$$

откуда и следует (5.4).

**Следствие 6.5.2.** *Формула (5.3) остается справедливой, если знаки коэффициентов  $c_R$  произвольные, а сумма  $\sum_R c_R v_R$  является характеристической функцией.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Имеем

$$v = \sum_R c_R v_R = \sum_{\substack{R \\ c_R \geq 0}} c_R v_R - \sum_{\substack{R \\ c_R < 0}} (-c_R) v_R.$$

Здесь во второй сумме все числа  $-c_R$  являются положительными, так что вычитаемая сумма оказывается характеристической функцией. Поэтому по лемме 6.5.1

$$\begin{aligned} \Phi(v) &= \Phi\left(\sum_{\substack{R \\ c_R \geq 0}} c_R v_R\right) - \Phi\left(\sum_{\substack{R \\ c_R < 0}} (-c_R) v_R\right) = \\ &= \sum_{\substack{R \\ c_R \geq 0}} c_R \Phi(v_R) - \sum_{\substack{R \\ c_R < 0}} (-c_R) \Phi(v_R) = \sum_R c_R \Phi(v). \end{aligned}$$

**Теорема 6.5.2.** *Каждая характеристическая функция имеет не более одного вектора Шепли.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** То, что каждая простейшая характеристическая функция имеет не более одного вектора Шепли, следует из теоремы 6.5.1. Но в силу предложения 6.5.2 произвольная характеристическая функция представима в виде линейной комбинации простейших единственным способом. Поэтому из доказанного выше следует, что каждая характеристическая функция имеет не более одного вектора Шепли.

Нам остается доказать существование вектора Шепли для любой характеристической функции.

**Теорема 6.5.3.** *Для любой характеристической функции  $v$  на  $I = \{1, \dots, n\}$  компоненты вектора Шепли определяются формулой*

$$\Phi_i(v) = \sum_{i \in K \subset I} \frac{(n - |K|)! (|K| - 1)!}{n!} (v(K) - v(K \setminus i)). \quad (5.5)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Проверим сначала, что вектор  $\Phi(v)$  с компонентами из (5.5) удовлетворяет всем аксиомам Шепли.

Докажем эффективность вектора  $\Phi(v)$ . Для этого рассмотрим

$$\sum_{i \in I} \Phi_i(v) = \sum_{i \in I} \sum_{i \in K \subset I} \frac{(n - |K|)! (|K| - 1)!}{n!} (v(K) - v(K \setminus i)). \quad (5.6)$$

Во всей двойной сумме выражение  $v(K)$  встречается в роли уменьшаемого  $|K|$  раз (по числу входящих в  $K$  элементов) и тем самым приобретает коэффициент

$$|K| \frac{(n - |K|)! (|K| - 1)!}{n!} = \frac{(n - |K|) - |K|!}{n!},$$

который при  $|K| = n$ , т.е. при  $K = I$ , очевидно, равен единице. В роли же вычитаемого оно встретится  $n - |K|$  раз (по числу не входящих в  $K$  элементов) и тем самым приобретает коэффициент

$$-(n - |K|) \frac{(n - |K| - 1)! |K|!}{n!} = -\frac{(n - |K|)! |K|!}{n!}, \quad \text{если } n \neq |K|,$$

и коэффициент 0, если  $n = |K|$ .

Таким образом, правая часть (5.6) равна  $v(I)$ :

$$\sum_{i \in I} \Phi_i(v) = v(I), \quad (5.7)$$

и вектор  $\Phi(v)$  оказывается эффективным.

Проверка аксиомы болвана тривиальна. Пусть в игре  $v$  игрок  $i$  является болваном. Тогда для любой коалиции  $K \subset I$

$$v(K) - v(K \setminus i) = 0,$$

а следовательно, каждое слагаемое в (5.5) для этого  $i$  равно 0. Поэтому

$$\Phi_i(v) = 0.$$

Проверим теперь аксиому симметричности. Пусть  $\pi$  — перестановка  $I$  такая, что  $v(\pi K) = v(K)$  для любой коалиции  $K$ . Тогда вместе с  $K$  коалиция  $\pi K$  также пробегает все подмножества  $I$ , и мы можем (5.5) переписать как

$$\Phi_{\pi i}(v) = \sum_{\pi i \in \pi K \subset I} \frac{(n - |\pi K|)! (|\pi K| - 1)!}{n!} (v(\pi K) - v(\pi K \setminus \pi i)).$$

С другой стороны, поскольку  $v(\pi K) = v(K)$  и  $|\pi K| = |K|$ , то  $\pi i$  и  $\pi K$  под знаком суммирования можно обратно переименовать соответственно в  $i$  и  $K$ . Окончательно мы имеем

$$\Phi_{\pi i}(v) = \sum_{K \subset I} \frac{(n - |K|)! (|K| - 1)!}{n!} (v(K) - v(K \setminus i)) = \Phi_i(v).$$

**А к с и о м а л и н е й н о с т и** следует из того, что компоненты вектора  $\Phi(v)$  зависят от значений характеристической функции  $v$  линейно.

Таким образом, вектор  $\Phi(v)$  действительно является для характеристической функции  $v$  вектором Шепли, существование которого тем самым доказано.

## 6.6. Дополнение. Выпуклые игры

1. Пусть  $I = \{1, \dots, n\}$  — множество игроков, а  $v$  — выпуклая игра, т.е. для любых  $S, T \subset I$

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T). \quad (6.1)$$

Множество всех выпуклых игр мы будем обозначать через  $\mathcal{C}$ . Оправданием такому названию может служить тот факт, что для выпуклой игры «первые разности»

$$v(S + T) - v(S) \quad (6.2)$$

при фиксированном  $T$  монотонно возрастают по  $S$ . (Заметим, что если

$$f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$$

выпуклая функция, т.е.

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

при всех  $x, y \in \mathbf{R}_+$  и  $0 \leq \alpha \leq 1$ , то «первые разности» этой функции

$$f(x + y) - f(x) \quad (x, y \in \mathbf{R}_+)$$

при фиксированном  $y$  монотонно возрастают по  $x$ .)

Соотношение (6.2) наводит на мысль, что  $s$ -ядро выпуклой игры непусто. Действительно, можно заметить, что условие<sup>16</sup>

$$(v(S + \{i\}) - v(S)) \uparrow_s \quad (6.3)$$

равносильно монотонности (6.2). Утверждение же (6.3) означает, что игроку  $i$  целесообразно присоединяться к все большим коалициям; отсюда вытекает стремление к образованию большой коалиции, охватывающей вообще всех игроков. Поэтому естественно ожидать, что образуется максимальная коалиция, а меньшие коалиции этому не будут препятствовать. Следовательно, можно ожидать, что  $s$ -ядро непусто.

<sup>16</sup>Здесь и далее запись  $A(x) \uparrow_x$  будет означать, что функция  $A(x)$  монотонно возрастает по переменной  $x$ .

**Теорема 6.6.1.** Если  $v \in \mathcal{C}$ , то  $C(v) \neq \emptyset$ .

Доказательство ведется по индукции. Для  $n = 1$  доказывать нечего. Предположим, что теорема доказана для  $n - 1$  игроков. Пусть  $I = \{1, \dots, n\}$ , а  $T$  — коалиция из  $n - 1$  игроков. Тогда в силу индуктивного предположения функция

$$v^0(S) = v(S \cap T)$$

имеет непустое  $s$ -ядро, т.е. существует такой вектор  $m^0 \in \mathbb{R}^T$ , что

$$\begin{aligned} m^0(S) &\geq v^0(S), \forall S \subset T \\ m^0(T) &= m^0(I) = v^0(T) = v^0(I). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Определим вектор  $m \in \mathbb{R}^I$ , положив

$$m_i = \begin{cases} m_i^0, & i \in T, \\ v(I) - v(T), & i \notin T. \end{cases} \quad (6.5)$$

Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} m(I) &= \sum_{i \in I} m_i = \sum_{i \in T} m_i^0 + v(I) - v(T) = \\ &= m^0(T) + v(I) - v(T) = v(I) \end{aligned} \quad (6.6)$$

и для  $S \subset T$  в силу (6.4)

$$m(S) = m^0(S) \geq v^0(S) = v(S).$$

Кроме того, для  $S \not\subset T$  мы имеем, считая, что  $T = I \setminus \{i_0\}$ ,

$$\begin{aligned} m(S) &= m^0(S \cap T) + m_{i_0} \geq \\ &\geq v^0(S \cap T) + m_{i_0} = v(S \cap T) + v(I) - v(T) = \\ &= v(S \setminus \{i_0\}) + v(I) - v(I \setminus \{i_0\}) \geq v(S), \end{aligned}$$

причем последнее неравенство в цепочке следует из (6.3). Теорема доказана.

Идея доказательства здесь достаточно прозрачна: выигрыш делится между членами коалиции  $T$  соответственно некоторому дележу из  $C(v^0)$ , а вновь присоединяющемуся игроку  $i_0$  выплачивается все то, что он приносит большой коалиции.

А это позволяет подойти к следующей конструкции.

**Теорема 6.6.2.** *Пусть*

$$\emptyset = S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_n = I \quad (6.7)$$

*строго возрастающая последовательность коалиций из  $I$ , для которой  $|S_i \setminus S_{i-1}| = 1$  при всех  $i = 1, \dots, n$ . Тогда равенства*

$$x(S_i \setminus S_{i-1}) = v(S_i) - v(S_{i-1}) \quad (6.8)$$

*определяют некоторый дележ  $x \in C(v)$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о** аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Процесс, описываемый цепочкой (6.7), достаточно нагляден: пустая коалиция  $S_0$  за счет вступления в нее новых игроков последовательно увеличивается каждый раз на одного игрока. Этот порядок вступления определяет некоторую перестановку игроков  $\pi$ . Перестановка  $\pi$ , соответствующая (6.7), однозначно определяется равенством

$$\pi(S_i \setminus S_{i-1}) = i \quad (i = 1, \dots, n). \quad (6.9)$$

Пусть теперь  $\pi : I \rightarrow I$  — некоторая перестановка. Ясно, что она порождает некоторый порядок игроков. Обозначим множество первых (согласно этому порядку)  $i$  игроков через

$$S_i^\pi = \{k : \pi(k) \leq i\}.$$

Если  $\pi$  получено из соотношения (6.7) на основании (6.9), то из  $k \in S_i$ ,  $k \in S_j \setminus S_{j-1}$  (для некоторого  $j \leq i$ ) вытекает

$$\pi(k) = \pi(S_j \setminus S_{j-1}) = j \leq i.$$

Отсюда

$$S_i^\pi = S_i.$$

Поэтому справедлива следующая теорема.

**Теорема 6.6.3.** (Shapley, 1979). *Для любой перестановки  $\pi : I \rightarrow I$  дележ  $x^\pi$ , задаваемый равенством*

$$x_{\pi^{-1}(i)}^\pi = v(S_i) - v(S_{i-1}), \quad (6.10)$$

*принадлежит  $C(v)$ .*

**Замечание 6.6.1.** *Легко видеть, что*

$$x_k^\pi = v(S_{\pi(k)}) - v(S_{\pi(k)-1}). \quad (6.11)$$

**Теорема 6.6.4.** (Shapley, 1979). *Каждый дележ  $x^\pi$ , описываемый равенством вида (6.10), является крайней точкой<sup>17</sup> множества  $C(v)$ , и все крайние точки могут быть получены таким путем.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Множество  $C$  является ограниченным замкнутым выпуклым многогранником в  $\mathbf{R}^n$ . Известно (см., например, Рокафеллар, 1973), что крайние точки можно получить как единственные решения системы  $n$  уравнений, получаемых из неравенств, задающих многогранник. При этом необходимо еще проверить, принадлежат ли найденные таким образом точки многограннику.

В силу равенства (6.8) для заданных  $x^\pi = x$  и  $S_i^\pi = S_i$  мы имеем

$$x(S_i) = x(S_i \setminus S_{i-1}) + x(S_{i-1} \setminus S_{i-2}) + \cdots + x(S_1 \setminus S_0) = v(S_i),$$

т. е.  $x$  является решением системы  $n$  уравнений. Из равенства (6.10) следует, что  $x$  является единственным решением этой

---

<sup>17</sup>Точка  $x$  называется крайней точкой некоторого множества  $X$ , если не существует таких различных  $x', x'' \in X$ , что  $x = (x' + x'')/2$ .

системы. Наконец, по теореме 6.6.3  $x \in C$ , так что  $x$  является крайней точкой  $c$ -ядра.

Пусть, наоборот,  $\bar{x}$  — некоторая крайняя точка  $c$ -ядра. Рассмотрим систему коалиций

$$\sigma = \sigma(\bar{x}) = \{S \subset I | \bar{x}(S) = v(S)\}. \quad (6.12)$$

Эта система замкнута относительно операций объединения и пересечения. Действительно, пусть  $S, T \in \sigma$ ; тогда

$$\begin{aligned} v(S \cup T) &\leq \bar{x}(S \cup T) = \bar{x}(S) + \bar{x}(T) - \bar{x}(S \cap T) \leq \\ &\leq v(S) + v(T) - v(S \cap T) \leq v(S \cup T) \end{aligned} \quad (6.13)$$

и, следовательно,  $S \cup T \in \sigma$ .

Точно так же доказывается, что и  $S \cap T \in \sigma$ . Пусть

$$\emptyset = S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_m = I \quad (6.14)$$

строго возрастающая последовательность коалиций из  $\sigma$ , имеющая наибольшую длину. Если  $m = n$ , то наша теорема доказана. Если  $m < n$ , то найдется такое  $S_k$ , что

$$|S_{k+1} \setminus S_k| \geq 2.$$

Пусть, например,  $\{i, j\} \subseteq S_{k+1} \setminus S_k$ .

Ввиду того, что  $\bar{x}$  как крайняя точка является единственным решением системы

$$\sum_{i \in S} x_i = v(S), \quad (S \in \sigma), \quad (6.15)$$

существует хотя бы одно такое  $S \in \sigma$ , что (не нарушая общности)

$$i \in S, \quad j \notin S.$$

Множество  $T = (S \cup S_k) \cap S_{k+1}$  является элементом  $\sigma$  ввиду замкнутости семейства  $\sigma$  относительно операций объединения и пересечения. Кроме того, для  $T$  имеет место включение

$$S_k \subset T \subset S_{k+1},$$

а это невозможно в силу того, что (6.14) — последовательность наибольшей длины. Поэтому случай  $m < n$  невозможен, и теорема доказана.

**Теорема 6.6.5.** Пусть функция  $v \in \mathcal{C}$  такова, что для  $S, T \in B$ , для которых  $S \setminus T \neq \emptyset$  и  $T \setminus S \neq \emptyset$ , всегда имеет место

$$v(S) + v(T) < v(S \cup T) + v(S \cap T). \quad (6.16)$$

Тогда все дележи  $x^\pi$  различны. В этом случае  $C$  имеет ровно  $n!$  крайних точек.

**Доказательство.** Пусть множества  $S$  и  $T$  удовлетворяют условиям теоремы, а  $\bar{x}$  — некоторая крайняя точка  $C$ . Покажем, что если  $\bar{x}$  — крайняя точка  $C$ , а  $S, T \in \sigma(\bar{x})$ , то либо  $S \subseteq T$ , либо  $S \supseteq T$ .

Действительно, из  $\bar{x}(S) = v(S)$  и  $\bar{x}(T) = v(T)$  на основании свойств  $\sigma(\bar{x})$  следовало бы, что  $\bar{x}(S \cup T) = v(S \cup T)$  и  $\bar{x}(S \cap T) = v(S \cap T)$ . Отсюда, в свою очередь, вытекало бы

$$\begin{aligned} v(S) + v(T) &= \bar{x}(S) + \bar{x}(T) = \bar{x}(S \cup T) + \bar{x}(S \cap T) = \\ &= v(S \cup T) + v(S \cap T), \end{aligned}$$

а это противоречит (6.16).

Поэтому множества из  $\sigma(\bar{x})$  можно упорядочить так:

$$\emptyset = S_0 \subset S_1 \subset \dots \subset S_m = I.$$

Мы уже видели, что должно быть  $m = n$  и, следовательно, соответствие между крайней точкой  $\bar{x}$  и системой (6.7) является взаимно однозначным.

**Следствие 6.6.1.** Если  $v \in \mathcal{C}$  и выполнено (6.16), то значение Шепли игры  $v$  есть центр тяжести  $s$ -ядра  $C(v)$ .

Доказательство немедленно следует из теоремы и формулы, определяющей значение Шепли.

## 6.7. Задачи

1. Вычислите значение Шепли следующей кооперативной игры трех лиц:  $v(i) = 0$ ,  $v(12) = v(13) = 4$ ,  $v(23) = 5$ ,  $v(123) = 6$ .
2. Докажите, что если кооперативная игра трех лиц такова, что  $v(i) = 0$  для любого  $i = 1, 2, 3$ , и  $0 \leq v(S) \leq v(I)$  для любой коалиции  $S$ , состоящей из двух игроков, то для  $n$ -ядра либо три эксцесса, соответствующие двух-элементным коалициям, равны, либо два из них равны, а третий больше. Если  $v(I) \leq 2v(S)$ , то все три эксцесса равны.
3. Вычислите значение Шепли следующей игры трех лиц:  $v(i) = 0$  для любого  $i = 1, 2, 3$ ,  $v(12) = v(23) = 3$ ,  $v(13) = 4$ ,  $v(I) = 6$ . Что можно сказать о непустоте (или пустоте)  $s$ -ядра этой игры?
4. Докажите, что  $s$ -ядро игры трех лиц  $v$ , в которой  $v(i) = 1$  для любого  $i = 1, 2, 3$ ,  $v(12) = 3.5$ ,  $v(23) = 2.5$ ,  $v(13) = 3$ ,  $v(I) = 4$ , пусто.
5. а) Дана следующая кооперативная игра  $v: I = \{1, 2, 3\}$ ,

$$\begin{aligned} v(1) &= v(2) = v(3) = 1, v(1, 2) = v(1, 3) = 4, \\ v(2, 3) &= 6, v(I) = 7. \end{aligned}$$

Вычислите вектор Шепли и  $n$ -ядро этой игры.

- б) Вычислите  $n$ -ядро следующей кооперативной игры  $w: I = \{1, 2, 3\}$ ,

$$\begin{aligned} w(1) &= w(2) = w(3) = 0, w(1, 2) = w(1, 3) = 3, \\ w(2, 3) &= 5, w(I) = 7. \end{aligned}$$

## Глава 7.

# Модели распределения

В этой главе, которая инспирирована прекрасным образом Э. Мулена (Moulin, 1999), мы рассматриваем ряд простых моделей «справедливого распределения», исследование которых опирается на аксиоматический метод, важность которого мы обсуждали в главе 6, а его применение рассмотрели на примере значения Шепли и арбитражного решения Нэша.

В достаточно общем виде эти модели можно охарактеризовать следующим образом: есть некоторая технология (производства) и некоторое множество пользователей этой технологии. Эти пользователи оказывают воздействие на производственный план различными способами: либо за счет различного спроса на продукцию, либо за счет различного вклада ресурсов (факторов производства), либо за счет и того, и другого. Если индивидуальные спросы (или вклады) однородны (т.е. общий спрос есть просто сумма индивидуальных спросов), а технология имеет постоянную отдачу от масштаба, то справедливое распределение ресурсов и продукции между пользователями просто может следовать классической максиме Аристотеля: «Общество держится тем, что каждому воздается пропорционально его деятельности»<sup>1</sup>. В общем случае задача становится уже более сложной.

---

<sup>1</sup>Аристотель. Никомахова этика // Аристотель. Соч.: в 4 т. Т. IV, М., 1983.

Глава разбита на три раздела в соответствии с тремя базовыми моделями, которым посвящена бóльшая часть современной литературы по этой проблематике. Мы начнем (п. 7.1) с модели рационирования, в которой заданный объем ресурсов (например, денег) должен быть распределен между получателями выгоды с различными претензиями на ресурсы. Во втором разделе мы рассмотрим однофакторную технологию с однопродуктовым выпуском, когда все пользователи потребляют однородный продукт (выпуска) и вкладывают однородный ресурс (фактор производства): типичная задача описывается с помощью перечня индивидуальных спросов на выпуск (соответственно вкладов) и производственной функции, а проблема состоит в распределении затрат (произведенной продукции). Наконец, в последнем разделе гл. 7 мы рассмотрим третью модель, в которой задача формально такая же, что и во второй модели, но теперь уже рассматривается технология с единственным однородным фактором производства и неоднородным (гетерогенным) относительно агентов выпуском (соответственно одним однородным фактором производства и неоднородными относительно агентов факторами производства).

## 7.1. Рационирование

**1. Задачи рационирования.** *Задача рационирования*<sup>2</sup> (rationing problem) — это тройка  $(I, t, x)$ , в которой  $I$  — конечное множество агентов, неотрицательное число  $t$  представляет подлежащий распределению объем ресурсов, а вектор  $x = (x_i)_{i \in I}$  описывает требования (claims) агентов, причем

$$x_i \geq 0 \quad \text{для любого } i \in I$$

---

<sup>2</sup>Поскольку в отечественной литературе еще нет устоявшейся терминологии, касающейся рассматриваемой проблематики, мы будем всегда в скобках указывать соответствующий английский термин.

и

$$0 \leq t \leq \sum_{i \in I} x_i.$$

Решением задачи рационирования является вектор  $y = (y_i)_{i \in I}$ , описывающий доли агентов  $y_i$ ,  $i \in I$  такие, что

$$0 \leq y_i \leq x_i \quad \forall i \in I \quad \text{и} \quad \sum y_i = t.$$

Напомним, в связи с приведенным определением, задачу банкротства, упомянутую нами в разделе 6.1 (пример 6). Другой пример — это также упоминавшаяся нами задача налогообложения: в этом случае  $t$  — это сумма, которая должна быть собрана, причем, если в задаче банкротства ресурсы — это блага (goods), то в задаче налогообложения — это уже «негодные» товары (bads). В микроэкономике пример, аналогичный налогообложению, дает распределение затрат на производство неделимого публичного продукта:  $t$  — затраты на производство продукта, а  $x_i$  — выгода агента  $i \in I$ . Рационирование возникает и на рынке с фиксированной ценой продукта:  $t$  — доступное потребление, а  $x_i$  — спрос агента  $i$ .

Заметим, что задачу рационирования можно естественно интерпретировать как арбитражную схему (см. п. 6.2) с трансферабельной полезностью, в которой точка *status quo* определяется вектором  $x$ , а множество допустимых векторов выигрышей представляет собой множество

$$\{z \in \mathbb{R}^I : \sum z_i \leq t\}.$$

*Метод рационирования*  $r$  ставит в соответствие каждой задаче рационирования  $(I, t, x)$  решение  $y = r(I, t, x)$ . Мы считаем, что переменные  $t, x_i, y_i \in \mathbb{R}_+^1$  и соответствуют делимым ресурсам, требованиям, спросу (неделимость ресурсов и т. д. мы в данной главе не рассматриваем, хотя соответствующие задачи представляют также важный класс задач распределения). Будем обозначать через  $\mathfrak{R}$  множество методов

рационирования с заданной популяцией потенциальных агентов, т.е. бесконечным множеством, из которого выбираются возможные сообщества (множества) агентов  $I$ .

Все обсуждаемые ниже методы рационаирования обладают следующим свойством *ресурсной монотонности* (RM — Resource Monotonicity): если  $t \leq t'$ , то  $r(I, t, x) \leq r(I, t', x)$  для любых  $I$ ,  $t$ ,  $t'$  и  $x$ . Иными словами, если объем ресурсов увеличивается, то доля ни одного из агентов не должна уменьшиться. В большинстве случаев ресурсная монотонность следует из других аксиом, поэтому она не всегда входит в число аксиом, определяющих тот или иной метод рационаирования. Если  $r$  — метод рационаирования, то полезным оказывается *двойственный метод*  $r^*$ , преобразующий выигрыши в проигрыши:

$$r^*(I, t, x) = x - r(I, x_I - t, x) \quad \text{для любых } I, t, x,$$

где<sup>3</sup>  $x_I = \sum_{i \in I} x_i$ . Для данного  $x$ , метод  $r^*$  распределяет  $t$  единиц «выигрышей» точно таким же способом, каким  $r$  распределяет потери  $x_I - t$ :

$$y_i^*(t, x) = x_i - y_i(x_I - t, x).$$

**2. Пропорциональное рационарование.** Метод *пропорционального рационарования* (proportional rationing) определяется следующим образом:

$$y = pr(I, t, x) = \frac{t}{x_I} \cdot x \quad \text{для } x_I > 0$$

(если  $x_I = 0$ , то  $y = 0$ ).

Таким образом, пропорциональный метод приписывает равные доли агентам с равным спросом. Помимо этого, он безразличен к именам агентов, а исходит лишь из размера

---

<sup>3</sup>Мы отступаем здесь от принятого нами ранее обозначения  $x(I) = \sum_{i \in I} x_i$ , поскольку в данном случае оно менее удобно.

относительного спроса агентов. Формально эти два свойства описываются следующим образом:

*Равным агентам — поровну: (ETE — Equal Treatment of Equals):*

из  $x_i = x_j$  следует  $y_i = y_j$  для любых  $I, t, x$  и любых  $i, j \in I$ .

*Симметричность:*

$y = r(I, t, x)$  является симметричной функцией переменных  $x_i, i \in I$ .

Необходимо отметить, что из симметричности следует свойство «равным агентам — поровну».

Возможны различные способы характеристики метода пропорционального рационирования, причем эти способы исходят либо из возможности «слияния» подмножества агентов в одного агента с комбинированным спросом, либо из возможности «разбиения» одного агента на нескольких более мелких агентов. Важным здесь является то, что пропорциональное рационирование «дисконтирует» каждую единицу спроса/требования с помощью одного и того же множителя. Поэтому пропорциональный метод применим тогда, когда требования трансферабельны, как, например, в случае анонимных облигаций.

Для произвольного множества агентов  $I$  и подмножества  $S \subset I$  через  $I^{[S]}$  будет обозначаться множество с  $(|I| - |S| + 1)$  агентами (здесь и далее  $|S|$  — число агентов в множестве  $S$ ), где все агенты из  $S$  объединены в единого агента, обозначаемого  $S^*$ . Например, если  $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $S = \{2, 3, 4\}$ , то  $I^{[S]} = \{1, S^*, 5\}$ , где  $S^* = \{2, 3, 4\}$ .

Для любого  $x \in \mathbb{R}_+^I$  будем далее обозначать:

- $x_S = \sum_{i \in S} x_i$ ;
- $x_{[S]}$  — проекция  $x$  на  $\mathbb{R}_+^S$ ;
- $x^{[S]} \in \mathbb{R}^{I^{[S]}}$  определяется следующим образом:

$$x_i^{[S]} = \begin{cases} x_i, & i \notin S \\ x_{S^*}^{[S]} = x_S & \end{cases}.$$

Иными словами, компонента  $x^{[S]}$ , соответствующая объединенному агенту  $S^*$ , есть сумма требований агентов из  $S$ .

Рассмотрим следующие четыре свойства, которые, как оказывается (см. теорему 7.1 ниже), однозначно определяют метод пропорционального рационирования.

*Отсутствие преимущественного перераспределения* (NAR — No Advantageous Reallocation):

для любых  $I$ ,  $S$ , любого  $t$  и любых  $x$ ,  $x'$   
из  $x^{[S]} = x'^{[S]}$  следует  $r_S(I, t, x) = r_S(I, t, x')$ .

Иными словами, перераспределение индивидуального спроса между агентами из  $S$  не меняет суммарную долю этих агентов (а это делает подобное перераспределение неприбыльным).

*Несущественность перераспределений* (IR — Irrelevance of Reallocations):

для любых  $I$ ,  $S$ , всех  $t$  и любых  $x$ ,  $x'$   
из  $x^{[S]} = x'^{[S]}$  следует  $r_j(I, t, x) = r_j(I, t, x')$  для любых  $j \in I \setminus S$ .

То есть перераспределение требований не оказывает влияния на агентов, не имеющих отношения к перераспределению.

*Независимость от слияния и разделения* (IMS — Independence of Merging and Splitting):

для любых  $I$ ,  $S$ , любого  $t$  и любого  $x$

$$r(I, t, x)^{[S]} = r(I^{[S]}, t, x^{[S]}).$$

Операция слияния — это переход от  $I$  к  $I^{[S]}$ , а операция разделения — обратное преобразование. Повторное применение IMS дает следующее свойство: если  $(I_k)_{k \in M}$  — разбиение  $I$  (т.е.  $I_k \cap I_{k'} = \emptyset$  при  $k \neq k'$  и  $\bigcup_{k \in M} I_k = I$ ) и  $x \mapsto x^*$  — отображение «слияния» из  $\mathbb{R}_+^I$  в  $\mathbb{R}_+^M$ , задаваемое равенством

$$x_k^* = x_{I_k} \quad \text{для любого } k \in M,$$

то  $r_{I_k}(I, t, x) = r(M, t, x^*)$  для любого  $k \in M$ .

Следующее свойство обеспечивает более точную декомпозицию метода рационирования.

*Декомпозиция* (DEC — Decomposition):

для любого  $I$  и любого разбиения  $(I_{k'})_{k' \in M}$  множества  $I$ , для любого  $t$ , любого  $x$  и любого  $k$

$$r(I, t, x)_{[I_k]} = r(I_k, t_k, x_{[I_k]}),$$

где  $t_k = r_k(M, t, x^*)$ .

Это позволяет вначале определить доли элементов  $I_k$  разбиения, а затем распределять эти доли уже в соответствующих подмножествах агентов.

**Теорема 7.1.1.** *Предположим, что  $|I| \geq 3$ . Пропорциональный метод удовлетворяет всем четырем свойствам NAR, IR, IMS и DEC. Обратно пропорциональный метод является единственным методом рационирования, удовлетворяющим одному (любому) из четырех указанных свойств.*

Доказательство второй части этой теоремы (первая очевидна) можно найти в работе Moulin, 1987. (Заметим, что достаточно просто доказать, что NAR эквивалентно IR, IMS влечет IR и из DEC следует IR.)

### 3. Равномерные выигрыши и равномерные потери.

Цель этих методов рационирования состоит в выравнивании действительных «выигрышей»  $y_i$  и чистых потерь  $(x_i - y_i)$  между агентами.

Метод *равномерных выигрышей*  $ug$  (Uniform Gains) определяется следующим образом:

$$y_i = ug_i(I, t, x) = \min\{\lambda, x_i\},$$

где  $\lambda$  — решение уравнения

$$\sum_{i \in I} \min\{\lambda, x_i\} = t.$$

Метод *равномерных потерь*  $ul$  (Uniform Losses) задается так:

$$y_i = ul_i(I, t, x) = (x_i - \mu)_+,$$

где  $\mu$  — решение уравнения

$$\sum_{i \in I} (x_i - \mu)_+ = t$$

(здесь  $(x_i - \mu)_+ = \max(0, x_i - \mu)$ ).

Для данной задачи рационирования  $(I, t, x)$  обозначим через  $Y(I, t, x)$  множество допустимых решений:

$$Y(I, t, x) = \{y \in \mathbb{R}_+^I : 0 \leq y_i \leq x_i \text{ и } \sum_{i \in I} y_i = t\}.$$

Можно проверить (см., например, Мулен, 1991), что  $ug(I, t, x)$  является единственным решением задачи максимизации на  $Y(I, t, x)$  лексиминного порядка, т.е. оно лексикографически максимизирует наименьшую координату  $y_i$ , затем следующую наименьшую координату и т.д.<sup>4</sup> Аналогично  $ul(I, t, x)$  является единственным «максимизатором» лексиминного порядка относительно вектора потерь  $(x_i - y_i)$ .

Важным моментом является то, что эти два метода —  $ug$  и  $ul$  — образуют двойственную пару:  $ul = ug^*$  и  $ug = ul^*$ . Это позволяет параллельно рассматривать аксиоматический подход к этим двум методам.

Оба этих метода, так же, кстати, как и пропорциональный, сохраняют естественный порядок выигрышей и потерь в том смысле, что они удовлетворяют следующим двум аксиомам ранжирования:

$$\begin{aligned} Rank : x_i \leq x_j &\implies y_i \leq y_j, \\ Rank^* : x_i \leq x_j &\implies (x_i - y_i) \leq (x_j - y_j). \end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>Поскольку мы обсуждали лексикографический порядок в п. 6.1, мы не останавливаемся на этом более подробно.

Эти две аксиомы двойственны в том смысле, что метод рационирования  $r$  удовлетворяет одной аксиоме тогда и только тогда, когда двойственный метод  $r^*$  удовлетворяет двойственной аксиоме.

Хотя  $ug$  и  $ul$  согласованы с абсолютным ранжированием выигрышей и потерь, они существенно различаются в ранжировании относительных выигрышей и потерь. Рассмотрим две следующие аксиомы — аксиому прогрессивности  $P$  (Progressivity) и аксиому регрессивности  $R$  (Regressivity).

$$P : 0 < x_i \leq x_j \longrightarrow \frac{y_j}{x_j} \leq \frac{y_i}{x_i},$$

$$R : 0 < x_i \leq x_j \longrightarrow \frac{y_i}{x_i} \leq \frac{y_j}{x_j}.$$

**Предложение 7.1.1.** *Метод  $ug$  является прогрессивным, но не регрессивным.*

*Метод  $ul$  — регрессивен, но не прогрессивен.*

Следующая пара двойственных аксиом верхней композиции (UC — Upper Composition) и нижней композиции (LC — Lower Composition), описывающих свойства структурной инвариантности, позволяют разложить вычисление долей в случае, если доступные ресурсы оцениваются сверху или снизу.

UC: для любых  $I, x$  и  $t, t'$  из  $0 \leq t \leq t' \leq x_I$  следует

$$r(I, t, x) = r(I, t, r(I, t', x)).$$

LC: для любых  $I, x$  и  $t, t'$  из  $0 \leq t' \leq t \leq x_I$  следует

$$r(I, t, x) = r(I, t', x) + r(I, t - t', x - r(I, t', x)).$$

Если мы вначале распределяем ресурсы  $t'$ , а затем оказывается, что доступных ресурсов в действительности меньше, а именно  $t$ , UC позволяет просто рассматривать оптимистичные доли  $r(I, t', x)$  в качестве начального спроса, с которого можно продолжать рационирование до уровня  $t$ . Заметим, что из UC следует ресурсная монотонность.

Соответственно, если мы знаем нижнюю границу  $t'$  имеющихся ресурсов  $t$ , то LC позволяет распределить пессимистические доли  $r(I, t', x)$ , вычесть эти доли из начальных уровней спроса, а затем распределить  $t - t'$  в соответствии с редуцированными требованиями  $x - r(I, t', x)$ .

**Предложение 7.1.2.** *Методы рационирования  $pr$ ,  $ug$  и  $ul$  удовлетворяют аксиомам UC и LC.*

**Предложение 7.1.3.** (Yang, 1990). *Пропорциональный метод рационирования характеризуется двумя свойствами (1) и (2), либо (1) и (3):*

(1) *Самодвойственность:*  $r = r^*$ ;

(2) *UC;*

(3) *LC.*

Наконец, приведем две двойственные аксиомы — аксиому нижней границы (LB — Lower Bound) и аксиому верхней границы (UB — Upper Bound), которые позволяют охарактеризовать методы  $ug$  и  $ul$ . Пусть  $|I| = n$ , тогда

LB: для любых  $I$ ,  $t$ ,  $x$  и любого  $i$   $y_i = r_i(I, t, x) \geq \min\{x_i, \frac{t}{n}\}$ .

UB: для любых  $I$ ,  $t$ ,  $x$  и любого  $i$   $y_i = r_i(I, t, x) \leq \{\frac{t}{n} + (x_i - \frac{x_I}{n})\}_+$ .

Интерпретацию этих аксиом мы оставляем читателю.

Нам потребуется еще одна аксиома О-Согласованности (ZC — Zero Consistency):

ZC: для любых  $I$ ,  $t$ ,  $x$  и любого  $i$  из  $x_i = 0$  следует

$$r(I, t, x)_{[I \setminus i]} = r(I \setminus i, t, x_{[I \setminus i]}).$$

Трудно себе представить, чтобы присутствие игрока с нулевым спросом (а потому и не получающим ничего) могло оказывать влияние на распределение ресурсов между другими, активными игроками.

**Предложение 7.1.4.** (Moulin, 1999). *Метод равномерных выигрышей характеризуется аксиомами LB, LC и ZC. Метод равномерных потерь характеризуется аксиомами UB, UC и ZC.*

#### 4. Метод оспаривания (Contested Garment method).

Этот метод относится только к задачам рационирования с двумя агентами. Рассмотрим следующую задачу рационирования  $(t, x_1, x_2)$ . Мы можем интерпретировать «заявку» агента  $i$  оптимистично как  $\min\{x_i, t\}$  (его требование имеет абсолютный приоритет) или пессимистично как  $(t - x_j)_+$  (если другой агент получает полностью то, что он требует). Затем мы делим поровну получающийся дефицит (в случае оптимистичных требований) или излишек (в случае пессимистичных требований). Оба способа дают один и тот же метод:

$$\begin{aligned} y_1 &= \min\{x_1, t\} + \frac{1}{2}(t - \min\{x_1, t\} - \min\{x_2, t\}) \\ &\quad \text{— (оптимистичный);} \\ &= (t - x_2)_+ + \frac{1}{2}(t - (t - x_1)_+ - (t - x_2)_+) \\ &\quad \text{— (пессимистичный).} \end{aligned}$$

Это можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{если } t \leq \min\{x_1, x_2\}, \quad \text{то } y_1 = y_2 &= \frac{1}{2}t; \\ \text{если } x_1 \leq t \leq x_2, \quad \text{то } y_1 = \frac{x_1}{2}, \quad y_2 &= t - \frac{x_1}{2}; \\ \text{если } \max\{x_1, x_2\} \leq t, \quad \text{то } y_1 = \frac{1}{2}(t + x_1 - x_2); \\ y_2 &= \frac{1}{2}(t + x_2 - x_1). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Есть два естественных способа распространения метода оспаривания на случай  $n > 2$ . Первый связан с тем, что для  $n = 2$  этот метод представляет собой среднее двух методов приоритета. *Метод 12-приоритета*, обозначаемый  $\text{prio}(12)$ , — это метод рационирования, отдающий абсолютный приоритет агенту 1 в том смысле, что:

если  $t \leq x_1$ , то  $y = (t, 0)$ ,  
 если  $x_1 \leq t \leq x_1 + x_2$ , то  $y = (x_1, t - x_1)$ .

Метод 21-приоритета определяется симметрично. В этом случае формулу (1.1), определяющую метод оспаривания  $cg$ , можно переписать в виде

$$cg = \frac{1}{2} \text{prio}(12) + \frac{1}{2} \text{prio}(21).$$

Поэтому первое обобщение метода оспаривания — это *метод случайного приоритета* (Random Priority method), определяемый как среднее арифметическое методов приоритета относительно всех перестановок множества  $I$ . Пусть  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  — перестановка множества  $I$ , причем агент  $\sigma_1$  имеет наивысший приоритет,  $\sigma_2$  — следующий и т.д., иными словами, перестановка упорядочивает агентов. Тогда  $y = \text{prio}(\sigma)(I, t, x)$  определяется следующим образом:

если  $k$  такое натуральное число, что

$$\sum_{i=1}^k x_{\sigma_i} \leq t \leq \sum_{i=1}^{k+1} x_{\sigma_i},$$

то

$$\begin{aligned} y_{\sigma_j} &= x_{\sigma_j} \text{ для } j = 1, \dots, k, \\ y_{\sigma_{k+1}} &= t - \left( \sum_{i=1}^k x_{\sigma_i} \right), \\ y_{\sigma_j} &= 0 \text{ для } j = k+2, \dots, n. \end{aligned}$$

Метод случайного приоритета определяется так:

$$y = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \text{prio}(\sigma)(I, t, x), \quad (1.2)$$

где сумма берется по всем перестановкам множества  $I$ .

Второй способ естественного обобщения метода  $cg$  на случай  $n > 2$  агентов использует смесь методов  $ug$  и  $ul$ . Это так

называемый метод Талмуда, получивший свое название благодаря статье Аумана и Машлера (Aumann, Maschler, 1985), которые отметили, что идея этого метода восходит к Талмуду (см. пример 6 в п. 6.1). Определяется он следующим образом:

$$\begin{aligned} y = tal(I, t, x) &= ug(I, \min\{t, \frac{xI}{2}\}, \frac{x}{2}) = \\ &= ul(I, (t - \frac{xI}{2})_+, \frac{x}{2}). \end{aligned}$$

Метод Талмуда «половинит» каждое требование и следует методу равномерных выигрышей до тех пор, пока не удовлетворены половинные претензии. Затем применяется метод равномерных потерь до удовлетворения оставшихся половинных требований. (Для  $n = 2$  tal совпадает с sg.)

Следующая теорема показывает связь методов Талмуда и случайного приоритета с важнейшими решениями кооперативных игр, а именно, значением Шепли и  $n$ -ядром.

Пусть  $(I, t, x)$  — задача рационирования. Рассмотрим две кооперативные игры, определяемые для любой коалиции  $S \subset I$  в соответствии с оптимистичными заявками — игра  $v$ , и пессимистичными — игра  $w$ :

$$\begin{aligned} v(S) &= \min\{x_S, t\}; \\ w(S) &= (t - x_{I \setminus S})_+. \end{aligned}$$

Заметим, что  $v(I) = w(I) = t$ .

**Теорема 7.1.2.** (O'Neil, 1982; Aumann, Maschler, 1985).

- (1) Метод случайного приоритета распределяет ресурсы в соответствии со значением Шепли приведенных выше игр.
- (2) Метод Талмуда распределяет ресурсы в соответствии с  $n$ -ядром приведенных выше игр.

Эта теорема позволяет переписать формулу (1.2) следующим образом:

$$y_i = \sum_{0 \leq s \leq n-1} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \sum_{\substack{S \subset I \setminus i \\ |S|=s}} (\min\{t, x_{S \cup i}\} - \min\{t, x_S\}).$$

**5. Согласованность и симметричные методы.** Согласованность (CSY — Consistency) в задачах рационирования, с одной стороны, весьма естественное свойство, а с другой, является очень мощным средством анализа решений этих задач.

CSY: для любых  $I$ ,  $S$ , любых  $t$  и  $x$

$$r(I \setminus S, t - r_S(I, t, x), x_{[I \setminus S]}) = r(I, t, x)_{[I \setminus S]}.$$

Свойство согласованности можно определить эквивалентным образом, рассматривая подмножества  $S$ , состоящие из одного агента:

$$r(I \setminus i, t - r_i(I, t, x), x_{[I \setminus i]}) = r(I, t, x)_{[I \setminus i]}.$$

Аксиома согласованности утверждает, что удаление одного (или нескольких) агентов из «сообщества»  $I$ , с одновременным удалением ресурсов, которые достались этому агенту (агентам), не меняет распределения долей в оставшемся сообществе.

Далее мы рассмотрим симметричные методы (т.е. методы, удовлетворяющие аксиоме SYM).

**Предложение 7.1.5.** (Moulin, 1999). Пусть  $r(\{1, 2\})$   $(t, (x_1, x_2))$  — метод рационирования, определенный только для задач с двумя агентами. Предположим, что  $r(\{1, 2\})$  симметричен и ресурсно монотонен. Тогда существует **не более одного** согласованного метода рационирования  $r$  (определенного для любого конечного сообщества  $I$ ), совпадающего с  $r(\{1, 2\})$  для любой задачи с двумя агентами. Более того,  $r$  симметричен и ресурсно монотонен.

Из этого предложения следует ряд важных выводов:

1. Метод Талмуда является единственным согласованным продолжением сг метода (для 2 агентов) на произвольное множество агентов.
2. Метод равномерных выигрышей является единственным согласованным методом, удовлетворяющим свойству нижней границы LB ( $y_i \geq \min\{x_i, \frac{t}{2}\}$ ) для задач с двумя агентами.
3. Метод равномерных проигрышей является единственным согласованным методом, удовлетворяющим свойству верхней границы UB ( $y_i \leq \frac{1}{2}(t + x_i - x_j)_+$ ) для задач с двумя агентами.

Приведенное выше предложение ставит вопрос о том, какие симметричные методы рационирования для двух агентов можно продолжить до (симметричного) согласованного метода для произвольного числа агентов? Прежде чем привести соответствующий результат, введем еще некоторые свойства.

Непрерывность (CONT — Continuity):  $r(I, t, x)$  непрерывен по  $(t, x)$  для любых  $I$ .

Определим семейство *параметрических методов рационирования*. Пусть  $f(\lambda, z)$  — вещественнозначная функция от двух переменных  $0 \leq \lambda \leq \Lambda$  и  $z \geq 0$ , причем  $\Lambda$  может быть конечным или бесконечным. Считаем, что

$$f(0, z) = 0, \quad f(\Lambda, z) = z,$$

$f(\lambda, z)$  — неубывающая, непрерывная функция от  $\lambda$ .

Поставим в соответствие каждой такой функции  $f$  единственный метод рационирования  $r$  следующим образом:

$$\text{для любых } I, t, x \quad r_i(I, t, x) = f(\lambda, x_i), \text{ где } \lambda \text{ — решение уравнения } \sum_{i \in I} f(\lambda, x_i) = t.$$

Следует отметить, что это уравнение может иметь в качестве решения целый интервал, однако каждое  $\lambda$  из этого интервала приписывает одни и те же доли каждому агенту.

Определенный таким образом метод рационирования называется параметрическим методом, ассоциированным с  $f$ . По построению параметрический метод симметричен и, конечно же, согласован.

Три основных метода —  $rg$ ,  $ug$  и  $ul$  — параметрические. Соответствующие функции  $f$  определяются следующим образом:

пропорциональный метод:  $f(\lambda, z) = \lambda z$ ,  $\Lambda = 1$ ;

метод равномерных выигрышей:  $f(\lambda, z) = \min(\lambda, z)$ ,  $\Lambda = +\infty$ ;

метод равномерных потерь:  $f(\lambda, z) = (z - \frac{1}{\lambda})_+$ ,  $\Lambda = +\infty$ ,

Заметим также, что метод случайного приоритета *не* согласован, а метод Талмуда — согласован. Последнее следует из того, что метод Талмуда является параметрическим для  $\Lambda = 2$  и

$$f(\lambda, z) = \begin{cases} \frac{\lambda}{1-\lambda}, & \text{для } 0 \leq \lambda \leq \frac{z}{z+2}, \\ \frac{z}{2}, & \text{для } \frac{z}{z+2} \leq \lambda \leq \frac{z+4}{z+2}, \\ z - \frac{2-\lambda}{\lambda-1}, & \text{для } \frac{z+4}{z+2} \leq \lambda \leq 2. \end{cases}$$

**Теорема 7.1.3.** (Young, 1987). *Параметрический метод является согласованным и симметричным методом рационирования. Обратно, непрерывный, согласованный и симметричный метод рационирования может быть представлен как параметрический метод, причем  $f(\lambda, z)$  — непрерывна по обоим переменным.*

**6. Методы фиксированной траектории.** Это важное семейство методов рационирования определяет богатое множество несимметричных вариантов метода равномерных выигрышей. Для определения этих методов должны быть заданы

экзогенные границы (конечные или бесконечные) индивидуальных требований. Мы будем называть эти границы мощностью игрока  $i$  и обозначать их через  $X_i$ . Задача рационализации в таком варианте должна удовлетворять условию  $0 \leq x_i \leq X_i$  для любого  $i \in I$ . Мы также считаем, что  $x_i$  всегда конечны.

Метод фиксированной траектории (Fixed Path Method) определяется на базе семейства монотонных траекторий (путей)  $\gamma(I)$ , одного для каждого возможного сообщества  $I$ . Траектория  $\gamma(I)$  — это неубывающее отображение отрезка  $[0, X]$  в параллелепипед  $[0, X_{[I]}] = \{z \in \mathbb{R}^I : 0 \leq z \leq X_{[I]}\}$  такое, что для любого  $0 \leq t \leq X_I$

$$\sum_{i \in I} \gamma_i(I, t) = t, \quad 0 \leq \gamma_i(I, t) \leq X_i,$$

$$\lim_{t \rightarrow X_I} \gamma_i(I, t) = X_i \text{ для любого } i \in I.$$

Заметим, что отображение  $\gamma$  должно быть непрерывным по  $t$ . Если  $X_i$  конечно для всех  $i$ , то приведенное выше предельное свойство выполняется, поскольку  $\gamma(I, X_I) = X_{[I]}$ .

Метод фиксированной траектории  $r^\gamma$  определяется следующим образом:

$$r_i^\gamma(I, t, x) = \min\{\gamma_i(I, s), x_i\} \text{ для любого } i \in I,$$

причем  $s$  является решением уравнения

$$\sum_{i \in I} \min\{\gamma_i(I, s), x_i\} = t.$$

Если мы положим  $x = X$  ( $x = X_{[I]}$ ) в указанном выше уравнении, то мы получим  $\gamma(I, t) = r^\gamma(I, t, X)$ .

Примеры методов фиксированной траектории включают метод равномерных выигрышей (для траектории  $ug$  из  $(I, t, X)$ ) и методы случайного приоритета  $prio(\sigma)$ , причем метод случайного приоритета можно представить как метод фиксированной траектории только, если все  $X_i$  конечны (с возможным исключением мощности последнего по приоритетности агента). Траектория  $t \mapsto prio(I, t, X)$  проходит

через вершины куба  $[0, X]$  в порядке, соответствующем перестановке  $\sigma$ . Если  $X_i = X_j \ \forall i, j$ , то метод равномерных выигрышей является симметричным методом фиксированной траектории. Он является единственным методом фиксированной траектории, удовлетворяющим свойству «равным агентам — поровну»: путь  $r(I, t, X)$  должен быть диагональю куба  $[0, X_{[I]}]$ .

Множество методов фиксированной траектории не содержит самодвойственных методов, поэтому пропорциональный метод и метод оспаривания лежат вне этого множества.

**Предложение 7.1.6.** *а) Все методы фиксированной траектории удовлетворяют свойству верхней композиции. б) Метод фиксированной траектории согласован тогда и только тогда, когда соответствующая траектория  $I \mapsto \gamma(I)$  коммутирует с оператором проектирования: для любых  $I, S \subset I$   $\gamma_{[S]}^{(I)} = \gamma(S)$ , а именно*

$$\gamma(I, t)_{[S]} = \gamma(S, \gamma_S(I, t)) \text{ для любого } t.$$

**7. Модель распределения излишка.** В задаче этого типа  $(I, t, x)$  ресурсы  $t$  должны быть распределены в соответствии с набором индивидуальных требований  $x$ , причем  $t \geq x_I$ : ресурсы превосходят запросы. Одна из возможных интерпретаций следующая:  $x_i$  — объем инвестиций, вложенных агентом  $i$  в совместное предприятие,  $t$  — суммарная отдача, дающая прибыль  $t - x_I$ .

*Решение  $y$*  задачи распределения излишка ставит в соответствие агенту  $i$  его долю  $y_i$  так, что  $0 \leq x_i \leq y_i$  и  $y_I = t$ . *Метод распределения излишка  $d$*  ставит в соответствие каждой задаче распределения излишка  $(I, t, x)$  решение  $y = d(I, t, x)$ . Двойственная операция в этой модели пропадает.

Здесь мы имеем дело только с двумя базовыми методами: пропорциональный метод определяется так же, как и раньше, а эгалитарный определяется естественным образом как

$$y_i = x_i + \frac{1}{n}(t - x_I) \text{ для любых } I, t, x \text{ и } i.$$

Метод приоритета просто отдает весь излишек агенту, имеющему наивысший приоритет, а для метода Талмуда аналогов здесь нет.

Аксиомы из п.2 этого параграфа в этой модели определяются точно так же, причем пропорциональный метод определяется одной из аксиом независимости от слияния и разделения *или* декомпозиции. С другой стороны, ни один метод, кроме пропорционального, не удовлетворяет аксиомам отсутствия преимущественного перераспределения и несущественности перераспределений.

Для характеристики пропорционального и эгалитарного методов нам понадобятся еще две аксиомы. *Аксиома независимости от масштабов измерения* (ср. п.6.2) требует, чтобы выбор единицы измерения (требований, спроса, налогооблагаемого дохода и доступных ресурсов) не оказывал бы влияния ни на что.

*Аксиома композиции* (здесь она одна) гласит:  
для любых  $I, t, t', x$  из  $x_I \leq t' \leq t$  следует

$$d(I, t, x) = d(I, t, d(I, t', x)).$$

**Теорема 7.1.4.** (Moulin, 1987). *Предположим  $|I| \geq 3$ . Существует ровно два метода, удовлетворяющих аксиомам «равным-поровну», отсутствия преимущественного распределения, согласованности, композиции и независимости от масштабов измерения: это пропорциональный и эгалитарный методы.*

**8. Рационирование неделимых единиц.** Предположим теперь, что товары, подлежащие распределению, неделимы (т.е. это, например, машины, билеты). Модель формально идентична рассмотренной выше, за исключением того, что переменные  $t, x_i, y_i$  — неотрицательные целые числа. Без

изменения остаются и определения задачи рационирования, решения и метода рационирования. Двойственная операция определяется так же.

В «неделимом» варианте рационирования нет *симметричных* методов рационирования: если мы распределяем одну единицу между двумя агентами, спросы которых идентичны, то ЕТЕ нарушается. В частности, пропадают наши три базовых симметричных метода — пропорциональный, методы равномерных выигрышей и равномерных проигрышей. Только методы приоритета  $prio(\sigma)$  остаются определенными так же, как и раньше.

Если нам не удастся достичь точной пропорциональности в «неделимой» модели, то можно попытаться аппроксимировать ее следующим образом. Зафиксируем  $I$  и  $x$  и рассмотрим ресурсно монотонный метод рационирования. Траектория  $t \mapsto r(I, t, x)$  описывается теперь последовательностью  $\{i_1, \dots, i_K\}$  в  $I$ , где  $K = x_I$ , а  $i_1$  — агент, получающий первую единицу ( $r(I, 1)$  дает единицу агенту  $i_1$ ),  $i_2$  — агент, получающий вторую единицу, и т.д. В последовательности  $\{i_1, \dots, i_K\}$  любой агент  $i \in I$  появляется ровно  $x_i$  раз.

Balinski, Shahidi, 1987 предложили следующим образом аппроксимировать пропорциональный метод. Если уже распределены  $t$  единиц и  $y = r(I, t, x)$ , то дать  $(t + 1)$ -ю единицу агенту  $i$ , для которого

$$\frac{x_i}{y_i + \frac{1}{2}} \geq \frac{x_j}{y_j + \frac{1}{2}} \quad \text{для всех } j.$$

Ясно, что мы можем определить аналогичные аппроксимации для методов равномерных выигрышей и проигрышей (а также и для других методов). Например, метод равномерных выигрышей аппроксимируется следующим образом: предположим, что  $t$  единиц уже распределены и  $y = r(I, t, x)$ ; обозначим через  $A(y, x)$  множество агентов, для которых  $y_j < x_j$ , и дадим следующую единицу одному из агентов  $i$  таких, что  $i \in A(y, x)$  и  $y_i \leq y_j$  для любых  $j \in A(y, x)$ .

Определения аксиом CSY, UC и LC остаются неизменными. Аксиома Согласованности (CSY) имеет особенно простую формулировку в терминах последовательности  $\{i_1, \dots, i_K\}$ , описывающей траекторию  $t \mapsto r(I, t, x)$ . Эта аксиома говорит, что исключение всех появлений некоторого агента  $i$  в последовательности определяет траекторию  $t \mapsto r(I \setminus i, t, x_{I \setminus i})$ .

Инвариантность относительно масштабов измерения можно определить, но это оказывается не слишком осмысленным. Действительно, если  $I = \{1, 2\}$  и метод дает первую единицу агенту 1,  $r(1, (1, 1)) = (1, 0)$ , то вряд ли будет разумным отдавать ему первые две единицы, если спрос каждого игрока удвоится:  $r(2, (2, 2)) = (1, 1)$  представляется гораздо более осмысленным (по крайней мере с эгалитарной точки зрения).

**Теорема 7.1.5.** (Moulin, 1999). *Для любого упорядочения  $\sigma$  множества  $\mathcal{N}$  метод приоритета  $\text{prio}(\sigma)$  удовлетворяет аксиомам CSY, UC и LC. Обратно, метод рационирования, удовлетворяющий этим трем аксиомам, является методом приоритета.*

## 7.2. Модель с переменной отдачей

**1. Задачи распределения затрат.** *Задача* (одномерная) *распределения затрат* — это тройка  $(I, C, x)$ , в которой  $I$  — конечное множество агентов,  $C : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  — непрерывная, неубывающая *функция затрат* такая, что  $C(0) = 0$ , а  $x = (x_i)_{i \in I}$  описывает для каждого  $i$  спрос  $x_i \geq 0$  агента  $i$ .

Решение задачи распределения затрат  $(I, C, x)$  — это вектор  $y = (y_i)_{i \in I}$ , описывающий затраты  $y_i \geq 0$  каждого агента  $i \in I$ , при этом  $\sum_{i \in I} y_i = C(\sum_{i \in I} x_i)$ .

Задача распределения излишка представляет собой тот же математический объект, что и задача распределения затрат, хотя ее интерпретация несколько иная: заданную функцию обозначим через  $F$ , и теперь она — производственная функция; если суммарный вклад есть  $z$ , то суммарный выпуск есть

$F(z)$ ; далее  $x_i$  — это вклад агента  $i$ , а  $y_i$  — доля агента  $i$  в суммарном выпуске  $F(x_I)$ .

*Метод распределения затрат* (соответственно *метод распределения излишка*) — это отображение  $\varphi$ , ставящее в соответствие каждой задаче распределения затрат (соответственно распределения излишка) решение  $y = \varphi(I, C, x)$ . Обозначим через  $\mathcal{M}$  множество методов распределения затрат.

Мы будем далее, как правило, считать множество  $I$  фиксированным, поэтому если это не вызовет недоразумений, мы будем опускать  $I$ , т.е.  $y = \varphi(C, x)$ , или  $y = \varphi(C)(x)$ .

Рассмотрим следующую аксиому.

*Аксиома постоянной отдачи*: если  $C(z) = \lambda z$  для любого  $z \geq 0$ , то  $\varphi(I, C, x) = \lambda x$  для любых  $I$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $C$  и  $x$ .

Простой пример задачи распределения затрат с возрастающей отдачей (убывающими средними затратами) дает дисконтное ценообразование. Агенты в  $I$  могут купить некий продукт по цене  $p_1$  в магазине розничной продажи либо в отдаленном оптовом магазине по более низкой цене  $p_2$ , правда, в этом случае появляются дополнительные фиксированные транспортные затраты  $c_0$ . Поэтому функция затрат имеет вид:

$$C(z) = \min \{p_1 z, c_0 + p_2 z\}.$$

Если суммарный спрос  $x_I$  говорит о целесообразности покупки в оптовом магазине (если  $x_I > \frac{c_0}{p_1 - p_2}$ ), то естественно встает вопрос о том, каким образом следует распределить суммарные затраты между покупателями?

Следующий пример — это случай возрастающих средних затрат (убывающая отдача). Предположим, что  $I$  — это все потребители некоторого товара ( $I$  — монополист этого товара), предлагаемого конкурентными фирмами. Таким образом,  $z$  покупается по цене  $S^{-1}(z)$ , где предложение  $p \rightarrow S(p)$  — возрастающая функция; получающаяся функция затрат  $C(z) = z \cdot S^{-1}(z)$  соответствует убывающей отдаче.

В контексте распределения излишка можно указать аналогичные примеры технологий с возрастающей и убывающей от-

дачей. Например, агент из  $I$  может монополизировать предложение определенного товара, спрос на который конкурентен. Рынок забирает  $z$  единиц выпуска при цене  $D(z)$ , где  $D$  — убывающая функция; следовательно, функция выручки  $F(z) = zD(z)$  имеет убывающую отдачу.

Пример с возрастающей отдачей включает фиксированные затраты. Агенты могут использовать технологию с постоянной отдачей  $r_1$  без фиксированных затрат либо они могут платить фиксированные затраты  $c_0$ , а выгода от более высокой отдачи  $r_2$ , поэтому

$$F(z) = \max\{r_1 z, r_2(z - c_0)\}.$$

**2. Метод средних затрат.** Простейший метод распределения затрат — метод средних затрат  $ac$  — распределяет суммарные затраты пропорционально индивидуальному спросу:

$$y = ac(C, x) = \frac{C(x_I)}{x_I} x$$

(конечно, если  $x_I = 0$ , должно быть  $y = 0$ ).

Первый способ аксиоматической характеристики этого метода повторяет аксиоматизацию метода ратционирования: аксиомы  $NAR$ ,  $IR$  и  $IMS$  дословно переносятся на рассматриваемый случай методов распределения затрат с помощью простой замены ресурсов  $t$  на функцию затрат  $C$ .

**Теорема 7.2.1.** *Предположим  $|I| \geq 3$ . Метод средних затрат удовлетворяет аксиомам  $NAR$ ,  $IR$  и  $IMS$ , а также обладает следующим свойством:*

если  $x_i = 0$ , то  $y_i = \varphi_i(I, C, x) = 0$  для любых  $C$ ,  $x$  и  $i$ ,

т.е. за нулевой спрос не платят.

(2.1)

*Обратно, метод средних затрат является единственным методом распределения затрат, обладающим свойством*

(2.1) и удовлетворяющим одной (любой) из аксиом  $NAR$ ,  $IR$  или  $IMS$ .

Свойство (2.1) иногда называют «отсутствием рога изобилия» (No Free Lunch): вы не получаете ничего из выпуска, если вы не участвуете в производственном процессе, вкладывая в него либо деньги, либо труд.

Рассмотрим теперь еще один способ характеристики метода средних затрат — это некий аналог (правда, значительно более сильный) ресурсной монотонности для методов рационирования.

А именно, рассмотрим следующую аксиому *монотонности по затратам*: из  $C^1 \leq C^2$  следует  $\varphi(C^2, x) \leq \varphi(C^1, x)$  для любых  $C^1, C^2$  и любых  $x$ .

**Предложение 7.2.1.** (Moulin, Shenker, 1994). *Метод средних затрат характеризуется комбинацией аксиомы постоянной отдачи и монотонности по затратам.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о** этого предложения мы приведем, поскольку оно очень короткое и достаточно простое. Зафиксируем  $C$  и  $x$ . Построим две функции затрат: функцию с постоянной отдачей  $\tilde{C}(z) = \frac{C(x_I)}{x_I}z$  и функцию  $D(z) = \max\{C(z), \tilde{C}(z)\}$ . Применяя аксиому постоянной отдачи, аксиому монотонности по затратам (и бюджетный баланс), последовательно получаем:

$$\tilde{y} = \varphi(\tilde{C}, x) = \frac{C(x_I)}{x_I} \cdot x;$$

$$\text{из } \tilde{y} \leq y^* = \varphi(D, x) \text{ и } \tilde{y}_I = y_I^* \text{ следует } \tilde{y} = y^*;$$

$$\text{из } y = \varphi(C, x) \leq y^* \text{ и } y_I = y_I^* \text{ следует } y = y^*,$$

что и дает требуемый результат.

**3. Серийное распределение затрат.** Метод средних затрат полностью игнорирует изменение отдачи между 0 и  $x_I$ .

Рассмотрим функцию затрат (с убывающей отдачей):

$$C(z) = (z - 10)_+.$$

Первые 10 единиц бесплатны, а дополнительный спрос стоит 1 за каждую единицу. Пусть  $I = \{1, 2, 3\}$  и  $x = (3, 5, 7)$ . Метод средних затрат дает  $y = \left(1, 1\frac{2}{3}, 2\frac{1}{3}\right)$ . Справедливо ли, что агент 1 платит что-то, если он считает, что его справедливая доля из 10 бесплатных единиц есть  $3\frac{1}{3}$  и что он не потребляет столь много?

Посмотрим теперь на функцию затрат (с возрастающей отдачей):

$$C(z) = \min \left\{ z, 9 + \frac{z}{10} \right\}$$

с  $x = (3, 5, 7)$ . Метод средних затрат дает  $y = (2.1, 3.5, 4.9)$ , поэтому агент 1 платит меньше, чем его «самостоятельные затраты»<sup>5</sup>  $C(x_1) = 3$ . Заметим, что первые 10 единиц стоят 1 каждая, а затем цена падает до 0.1 за каждую дополнительную единицу. Здесь уже агенты 2 и 3 могут протестовать против того, что они должны нести ответственность за «достижение» низких предельных затрат, поскольку  $3x_1 < 10$ , и агент 1 не должен получать выгоду от этого. Его справедливая доля была бы 3, потому что отдача постоянна до уровня  $3x_1$ .

Пусть  $I$  фиксировано и  $|I| = n$ . В свете предыдущих примеров введем две следующих аксиомы:

*Ограничения возрастающих предельных затрат (IMC bounds):*

если  $C$  выпукла, то  $C(x_i) \leq y_I = \varphi_i(C, x) \leq \frac{C(nx_i)}{n}$  для любых  $i, x$ .

*Ограничения убывающих предельных затрат (DMC bounds):*

---

<sup>5</sup>Stand Alone Cost.

если  $C$  вогнута, то  $\frac{C(nx_i)}{n} \leq y_i = \varphi_i(C, x) \leq C(x_i)$  для любых  $i, x$ .

Формула серийного распределения затрат инспирирована непосредственно неравенствами  $y_i \leq \frac{C(nx_i)}{n}$  для выпуклой функции затрат и  $y_i \geq \frac{C(nx_i)}{n}$  для вогнутой функции  $C$ . Зафиксируем  $C$  и вектор спроса  $x$ . Переобозначим агентов в соответствии с возрастанием спроса:  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ . Сначала распределим поровну затраты на первые  $nx_1$  единиц между всеми агентами. Теперь агент 1 обслужен полностью, и он платит  $\frac{C(nx_1)}{n}$ , затем мы поровну делим затраты на дополнительные единицы между остальными агентами  $\{2, 3, \dots, n\}$ . Теперь агент 2 обслужен, и т.д. (Напомним пример 7 с взлетно-посадочной полосой из п.6.1.)

Формально определим последовательность  $x^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  следующим образом:

$$\begin{aligned} x^1 &= nx_1; \\ x^2 &= x_1 + (n-1)x_2; \\ &\dots \\ x^i &= (n-i+1)x_i + \sum_{j=1}^n x_j; \\ &\dots \\ x^n &= x_I. \end{aligned}$$

Заметим, что эта последовательность неубывающая. Доли, соответствующие серийному распределению затрат — это:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{C(x^1)}{n}, \\ y_2 &= y_1 + \frac{C(x^2) - C(x^1)}{n-1}, \\ &\dots \\ y_i &= y_{i-1} + \frac{C(x^i) - C(x^{i-1})}{n-i+1} \\ &\dots \end{aligned}$$

или эквивалентно

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{C(x^1)}{n}, \\ y_2 &= \frac{C(x^2)}{n-1} - \frac{C(x^1)}{n(n-1)}, \\ &\dots \\ y_i &= \frac{C(x^i)}{n-i+1} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{C(x^j)}{(n-j+1)(n-j)}. \end{aligned}$$

В случае  $n = 2$  и  $n = 3$  общие формулы дают

$$\begin{aligned} n = 2, x_1 \leq x_2 : y_1 &= \frac{1}{2}C(2x_1), y_2 = C(x_1 + x_2) - \frac{1}{2}C(2x_1); \\ n = 3, x_1 \leq x_2 \leq x_3 : y_1 &= \frac{1}{3}C(3x_1), y_2 = \frac{1}{2}C(x_1 + 2x_2) - \frac{1}{6}C(3x_1), \\ y_3 &= C(x_3) - \frac{1}{2}C(x_1 + 2x_2) - \frac{1}{6}C(3x_1). \end{aligned}$$

В частности, в приведенных выше численных примерах получаем:

$$\text{если } C(z) = (z - 10)_+, x = (3, 5, 7), \text{ то } y = (0, 1.5, 3.5);$$

$$\text{если } C(z) = \min \left\{ z, 9 + \frac{z}{10} \right\}, x = (3, 5, 7), \text{ то } y = (3, 3.65, 3.85).$$

**Предложение 7.2.2.** Зафиксируем  $x$  так, что  $x_1 = \min_i x_i$  и  $x_n = \max_i x_i$ . Обозначим метод средних затрат через  $ac$  и метод серийных затрат через  $ser$ . Тогда:

если  $C$  выпукла, то  $ser_1(C, x) \leq ac_1(C, x)$  и  $ser_n(C, x) \geq ac_n(C, x)$ ;

если  $C$  вогнута, то  $ser_1(C, x) \geq ac_1(C, x)$  и  $ser_n(C, x) \leq ac_n(C, x)$ .

**Предложение 7.2.3.** Метод серийных затрат удовлетворяет аксиомам *IMC bounds* и *DMC bounds*. Более того, для любой неубывающей функции затрат  $C$  ( $C(0) = 0$ ) он удовлетворяет следующему условию универсальных ограничений:

$$\frac{1}{n}C(x_i) = y_i = \varphi_i(C, x) \leq C(nx_i).$$

В заключение этого раздела приведем метод распределения затрат Шепли-Шубика, введенный М.Шубиком в работе Shubik, 1962. Этот метод определяется следующим образом:

$$y_i = \sum_{0 \leq s \leq n-1} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \sum_{\substack{S \subset I \setminus i \\ |S|=s}} (C(x_{S \cup i}) - C(x_S)).$$

Нетрудно видеть, что этот метод удовлетворяет *аксиоме аддитивности*:  $\varphi(C^1 + C^2, x) = \varphi(C^1, x) + \varphi(C^2, x)$  для любых функций затрат  $C^1$ ,  $C^2$ , представимых в виде разности двух выпуклых функций.

### 7.3. Задачи распределения с неоднородными выпуском и факторами производства

В более общей задаче распределения затрат каждый агент  $i$  имеет спрос на различные продукты и технология определяет общие затраты  $C(x_1, \dots, x_n)$  (а не  $C(x_1 + \dots + x_n)$ , как в предыдущем разделе). В варианте распределения выпуска каждый агент  $i$  вкладывает количество  $x_i$  фактора  $i$ , а общий выпуск есть  $F(x_1, \dots, x_n)$  (а не  $(x_1 + \dots + x_n)$ ).

Примеры подобного рода задач включают, например, затраты телекоммуникационной сети, в которой пользователям нужны различные услуги (скажем, использование сети в разное время суток). Другой пример — это распределение затрат на осуществление большого проекта (скажем, строительства дамбы) между различными «получателями выгоды» от его использования (например, поставщиками электричества, фермами, туристическими фирмами; здесь хорошим примером является уже упоминавшаяся в гл.6 задача распределения затрат, возникшая в долине реки Теннесси (см. Straffin, Heaney, 1981).

Если различные подразделения фирмы вкладывают неоднородные факторы производства в общий проект, то как сле-

довало бы распределять прибыль между ними? Задача распределения затрат возникает здесь же, если, к примеру, подразделения пользуются услугами центральной администрации.

Мы несколько упростим общую модель, считая, что каждый агент потребляет только один продукт выпуска (или вкладывает только один фактор). В то же время функции затрат (или производственные функции) имеют достаточно общий вид:  $C(0) = 0$ ,  $C$  не убывает по  $x_i$  для любого  $i$ .

**1. Бинарный спрос. Значение Шепли.** Бинарная задача распределения затрат — это тройка  $(I, C, x)$ , где  $I$  — конечное множество агентов,  $C : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  — неубывающая функция затрат такая, что  $C(0) = 0$ ,  $x = (x_i)_{i \in I}$  — набор, описывающий спрос  $x_i$  каждого агента  $i$ , причем  $x_i = 0$  или 1.

Поскольку каждый из  $x_i$  может принимать только два значения — 0 или 1, то очень удобно вектор спроса  $x$  обозначать через  $S \subset I$  ( $S$  может оказаться пустым), а именно  $x_i = 1$  в том и только том случае, если  $i \in S$  (вспомним здесь нечеткие кооперативные игры и отождествление (простой) коалиции с ее характеристической функцией (см. п. 6.3)). В этом случае функция затрат  $C$  ставит в соответствие каждой коалиции  $S$  число  $C(S)$ , которое интерпретируется как затраты на обслуживание всех агентов из  $S$  и только их. Естественно предполагать, что  $C(\emptyset) = 0$  и  $C$  монотонна:

если  $S \subset T$ , то  $C(S) \leq C(T)$  для любых  $S, T \subset I$ .

Решение бинарной задачи распределения затрат  $(I, C, S)$  — это набор «долей затрат»  $y = (y_i)_{i \in I}$  таких, что

$$y_i \geq 0 \text{ для любого } i \text{ и } \sum_{i \in I} y_i = C(S).$$

Бинарный метод распределения затрат — это отображение  $\varphi$ , ставящее в соответствие каждой задаче  $(I, C, S)$  решение  $y = \varphi(I, C, S)$ .

Как обычно, этой задаче соответствует аналогичная бинарная задача распределения излишка, причем здесь  $S$  — множество активных агентов, а  $F(S)$  — результирующий выпуск, подлежащий распределению.

Идея распределения затрат пропорционально спросу в модели с бинарным спросом сводится к распределению  $C(S)$  поровну между всеми агентами из  $S$  (оставляя нулевые затраты агентам вне  $S$ ). Однако этот метод не учитывает «ответственности» агентов за возникновение затрат. Здесь очевидное требование состоит в том, что агент, спрос которого не порождает затрат, не должен платить ничего, т.е. мы имеем дело с аксиомой «болвана».

Обозначим через  $\partial_i C(S) = C(S) - C(S \setminus i)$  предельные затраты (сбережения) удаления агента  $i$  из коалиции  $S$ . Ясно, что  $\partial_i C(S) = 0$  для  $i \notin S$ .

*Аксиома «болвана»* (DUM — Dummy):

если  $\partial_i C(T) = 0$  для любых  $T \subset I$ , то  $\varphi_i(I, C, S) = 0$  для любых  $I, S, i$  и  $C$ .

Аналогично случаю кооперативных игр агент называется «болваном» для функции затрат  $C$ , если затраты на его обслуживание нулевые, т.е.  $C(i) = 0$  и беззатратно его добавление к любой коалиции  $S$ . Очевидно, что эгалитарный метод ( $y_i = \frac{C(S)}{|S|}$  для  $i \in S$ ,  $y_i = 0$  для  $i \notin S$ ) этой аксиоме не удовлетворяет.

*Аксиома аддитивности* (ADD — Additivity):

$$\varphi(I, C^1 + C^2, S) = \varphi(I, C^1, S) + \varphi(I, C^2, S) \quad \text{для всех } I, C^1, C^2, S.$$

Заметим, что DUM и ADD вместе обеспечивают свойство постоянной отдачи (см. п. 7.2). Если  $C$  линейна, т.е.  $C(x) = \sum c_i x_i$ , то тогда  $\varphi_i(I, C, S) = c_i x_i$ , где  $x_i = 1$ , если  $i \in S$ , и  $x_i = 0$  для  $i \notin S$ .

Обозначим семейство методов распределения затрат, удовлетворяющих аксиомам аддитивности и «болвана», через  $\mathcal{B}$  (DUM, ADD). Приведенные аксиомы не вводят ограничений на метод в зависимости от различных сообществ  $I$  и  $I'$ ,

Для каждого  $I$  метод приращений (Incremental Method) определяет для каждого непустого подмножества  $S \subset I$  (включая  $S = I$ ) перестановку (упорядочение)  $\sigma(S) = (\sigma_i, \dots, \sigma_s)$ , где  $s = |S|$ . Далее, доли затрат  $y = \varphi^\sigma(I, C, S)$  вычисляются следующим образом:  $y_i = 0$  для каждого  $i \notin S$ ,

[illegible]

Если мы обозначим через  $\Sigma(S)$  множество всех перестановок множества  $S$ , значение случайного упорядочения можно переписать следующим образом:

$$y = \varphi(I, C, S) = \sum_{\sigma(S) \in \Sigma(S)} \lambda_{\sigma(S)} \varphi^{\sigma(S)}(I, C, S) \text{ для любого } S.$$

Отметим, что мы можем выбрать произвольное множество «выпуклых» коэффициентов  $\lambda_{\sigma(S)}$  (т.е. неотрицательных, дающих в сумме единицу) для любой коалиции  $S$ . Например, для  $S = \{1, 2, 3\}$  мы можем выбрать перестановку  $(2, 1, 3)$ , а для  $S' = \{1, 2, 4\}$  — выбрать перестановку  $(1, 2, 4)$ . Наконец, для характеристики значения Шепли нам понадобится еще одна аксиома — аксиома симметричности, которую мы назовем так же, как в п. 7.1, «равным агентам – поровну» и которая утверждает, что если два агента симметрично влияют на функцию затрат, то их доли должны быть равными, точнее *«Равным агентам – поровну» (ETE)*:

Если  $C(T \cup i) = C(T \cup j)$  для любых  $i, j \neq T$ , то  
 $\varphi_i(I, C, S) = \varphi_j(I, C, S)$  для любых  $S \subset I$ , для любых  $C$ ,  
 $i, j$ .

**Предложение 7.3.1.** (Weber, 1988). *Множество значений случайного упорядочения совпадает с множеством  $\mathcal{B}$  (DUM, ADD) методов распределения затрат, удовлетворяющих аксиомам «болвана» (DUM) и аддитивности (ADD).*

Следующее следствие этого предложения, по сути дела, нам уже хорошо знакомо (см. п.6.1, где приведена аксиоматика значения Шепли, хотя аксиома симметрии там сформулирована в несколько иной форме).

**Следствие 7.3.1.** *Аксиомы DUM, ADD и ETE однозначно определяют метод распределения затрат — это значение Шепли, т. е. множество  $\mathcal{B}$  (DUM, ADD, ETE) содержит единственный метод:*

$$\varphi_i(I, C, S) = \sum_{t=0}^{s-1} \frac{t!(s-t-1)!}{s!} \sum_{\substack{T: T \subset S \setminus i \\ |T|=t}} \partial_i C(T \cup i) \text{ для любого } i \in S,$$

$$\varphi_j(I, C, S) = 0, \quad \text{если } j \notin S.$$

Это следствие выводится из приведенной выше теоремы Вебера с помощью следующего наблюдения (см. Moulin, 1995): метод из  $\mathcal{B}$  (DUM, ADD) должен удовлетворять аксиоме, известной как *независимость от несущественных затрат* (Independence of Irrelevant Costs):

если  $C^1(T) = C^2(T)$  для любых  $T \subset S$ , то  
 $\varphi(I, C^1, S) = \varphi(I, C^2, S)$  для любых  $I, C^1, C^2, S$ .

Метод приращений и значения случайного упорядочения, определяемые в контексте фиксированной популяции, могут распределять приоритеты (или «взвешивать» различные упорядочения) несогласованно с изменениями  $S$ . Поэтому мы должны переключиться на переменную популяцию.

Обозначим через  $\mathcal{N}$  максимальное множество (конечное и бесконечное), из которого могут выбираться агенты, через  $\sigma$  — порядок приоритетов на  $\mathcal{N}$ . На любом конечном множестве  $S$  этот порядок индуцирует упорядочение  $\sigma(S)$ , а формула (3.1) определяет *метод  $\sigma$ -приращений*. Аналогично, *согласованное значение случайного упорядочения* является выпуклой комбинацией методов  $\sigma$ -приращений, в которой  $\sigma$  варьируется по всем упорядочениям множества  $N$ , а коэффициенты не зависят от  $I$ ,  $C$  и  $S$ :

$$\varphi(I, C, S) = \sum_{\sigma \in \Sigma(N)} \lambda_{\sigma} \varphi^{\sigma(S)}(I, C, S) \text{ для любых } I, C, S.$$

Следующая аксиома (согласованность относительно «болвана» — DCY — Dummy-Consistency) утверждает, что удаление «болвана» не влияет на распределение затрат между остальными агентами:

если  $\partial_i C(T) = 0$  для любого  $T \subset I$ , то

$$\varphi(I, C, S)_{[I \setminus i]} = \varphi(I \setminus i, C, S \setminus i)$$

для всех  $S$ , для любых  $I$ ,  $i$  и  $C$ .

Следующее предложение, касающееся уже переменной популяции, является следствием теоремы 7.3.1.

**Предложение 7.3.2.** *Множество согласованных значений случайного упорядочения совпадает с множеством  $\mathcal{B}$  (DUM, DCY, ADD).*

Известно несколько альтернативных характеристик значения Шепли и значений случайного упорядочения, при которых аксиома аддитивности заменяется другими требованиями. Мы остановимся здесь лишь на двух (причем в контексте фиксированной популяции).

В случае значения случайного упорядочения доля агента зависит только от предельных затрат  $\partial_i C(T)$ . Это свойство называется *маржинализмом* (Marginalism):

если  $\partial_i C^1(T) = \partial_i C^2(T)$  для любых  $T \subset S$ , то

$\varphi_i(I, C^1, S) = \varphi_i(I, C^2, S)$  для любых  $I, C^1, C^2, S$  и  $i$ .

Значение Шепли однозначно характеризуется аксиомами маржинализма и ЕТЕ (Young, 1985).

Другая характеристика значения Шепли основана на так называемом *потенциале*:

$$P(I, C) = \sum_{S \subset I} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} C(S), \quad \text{где } n = |I|, s = |S|.$$

Значение Шепли можно представить в виде

$$\varphi_i(I, C, S) = \partial_i P(S, C) = P(S, C) - P(S \setminus i, C). \quad (3.2)$$

С.Харт и А.Мас-Колелл (Hart, Mas-Colell, 1989) показали, что значение Шепли полностью характеризуется существованием *некоторого* потенциала  $P$ , удовлетворяющего (3.2) и такого, что  $P(\emptyset, C) = 0$ .

Это сразу видно для случая двух агентов. Действительно, из (3.2) следует, что «за нулевой спрос не нужно платить»: из  $i \in S$  следует  $y_i = 0$ . Поэтому  $\varphi_i(I, C(i)) = C(i) = P(i, C)$ . Далее положим  $I = \{1, 2\}$  и вычислим  $y_i = \varphi_i(I, C, I)$ :

$$y_1 = P(I, C) - C(1), \quad y_2 = P(I, C) - C(2), \quad y_1 + y_2 = C((1, 2)).$$

Эта система дает нам значение Шепли в случае двух агентов:

$$y_i = (C(1, 2) + C(i) - C(j))/2.$$

(Для произвольного  $n$  результат может быть получен по индукции.)

**2. Переменный спрос на неделимые товары.** Спрос каждого агента  $i$  есть  $x_i \in \{0, 1, 2, \dots, X_i\}$  (мы считаем  $X_i$  конечным).

Функция затрат  $C$  есть отображение прямого произведения  $[0, X_{[I]}] = \prod_{i \in I} [0, X_i]$  в  $\mathbb{R}_+$  такое, что из  $C(0) = 0$  и  $x \leq x'$  следует  $C(x) \leq C(x')$ . (Подчеркнем, что здесь  $[0, x_i]$  — интервал *целых чисел*.)

$$y \geq 0 \text{ и } \sum_{i \in I} y_i = C(x).$$
[illegible]

где  $(x_{[T]}, 0)$  обозначает вектор с той же проекцией на  $T$ , что и  $x$ , и 0 на  $I \setminus T$ .

Методы приращений (а также их выпуклые комбинации) удовлетворяют ADD и DUM. Однако в  $\mathcal{B}(\text{DUM}, \text{ADD})$  есть много других методов, и мы построим семейство таких методов, называемое методами, *порожденными траекториями*.

Рассмотрим ресурсно монотонный метод рационирования  $r$  (для неделимых товаров). Поскольку мы считаем  $I$  фиксированным, то будем писать  $r(t, x)$  вместо  $r(I, t, x)$ , где  $x \in [0, X_{[I]}]$  и  $0 \leq t \leq x_I$ .

Пусть  $t \rightarrow r(t, x)$  описывается последовательностью  $s(x) = \{i_1, i_2, \dots, i_{x_I}\}$ , в которой агент  $i$  появляется ровно  $x_i$  раз. Каждому методу рационирования  $r$ , или, эквивалентно, каждому семейству последовательностей  $s(x)$  (одной для каждого  $x$ ) из  $[0, X_{[I]}]$  поставим в соответствие следующий метод распределения затрат  $y = \varphi^r(I, C, x)$ :

$$y_i = \sum_{t=1}^{x_I} \partial_i C(r(t, x)) dr_i(t, x) \quad (3.3)$$

для любых  $I, C, x$  и  $i$ ,

где  $dr_i(t, x) = 1$ , если  $i = i_t$  является  $t$ -м элементом последовательности  $s(x)$ , и  $dr_i(t, x) = 0$  в противном случае.

Метод распределения затрат (3.3) называется методом, порожденным траекторией, поскольку для каждого  $x$  доли затрат вычисляются вдоль траектории  $t \rightarrow r(t, x)$ , т.е. «вдоль последовательности»  $s(I, x)$ , следующим образом:

$C(r, (1, x))$  платит агент  $i_1$ ,

$C(r(2, x)) - C(r(1, x))$  платит агент  $i_2$  и т.д.

Для фиксированной популяции  $I$  имеет место следующая теорема.

**Теорема 7.3.1.** (Wang, 1998). *Каждый метод распределения затрат, удовлетворяющий аксиомам DUM и ADD, является выпуклой комбинацией методов, порожденных траекториями (с коэффициентами, зависящими от  $I$ , но не зависящими от  $C$  и  $x$ ). Никакие другие методы распределения затрат не удовлетворяют этим аксиомам.*

Для формулировки результата для случая переменной популяции нам понадобится, как всегда, аксиома согласованности относительно «болвана» (DCY – Dummy Consistering):

если  $\partial_i C(x) = 0$  для любого  $x \in [0, X_{[I]}]$ , то

$\varphi(I, C, x)_{[I \setminus i]} = \varphi(I \setminus i, C, x_{I \setminus i})$  для любых  $x \in [0, X_{[I]}]$ , для любых  $I$ ,  $C$  и  $i$ .

Нетрудно показать, что метод, порожденный траекторией, является согласованным относительно «болвана» тогда и только тогда, когда соответствующий метод рационирования согласован (согласованность  $r$  означает следующее свойство порождающей последовательности  $s(I, x)$ : последовательность  $s(I \setminus i, x_{I \setminus i})$  получается из  $s(I, x)$  удалением всех появлений агента  $i$ ). Поэтому мы называем метод *порожденным согласованной траекторией*, если он выводится из согласованного метода рационирования с помощью (3.3).

**Следствие 7.3.2.** *Каждый метод из  $\mathcal{B}$  ( $DUM$ ,  $DCY$ ,  $ADD$ ) является выпуклой комбинацией методов, порожденных согласованными траекториями.  $\mathcal{B}$  ( $DUM$ ,  $DCY$ ,  $ADD$ ) не содержит других методов.*

Мы завершим эту главу двумя примерами — методом Шепли–Шубика и методом Аумана–Шепли.

**Пример 1. Метод Шепли–Шубика.** Среднее арифметическое методов приращения называется также методом Шепли–Шубика:

$$\varphi_i^{SS}(I, C, x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \sum_{\substack{S \subset I \setminus i \\ |S|=s}} (C(x_{[s \cup i]}, 0) - C(x_{[S]}, 0)).$$

Этот метод не порожден траекторией; он является выпуклой комбинацией методов, порожденных траекториями, а точнее, методов приращений.

Интересно, что метод Шепли–Шубика может быть охарактеризован с помощью одной дополнительной (относительно

DUM и ADD) аксиомы, а именно *аксиомы нижней границы* (LC — Lower Bound):

$$\varphi_i(I, C, x) \geq \frac{1}{\theta(C)} C(x_i, 0_{[I \setminus i]}) \text{ для любых } I, C, x \text{ и } i, ,$$

где  $\theta(C)$  — число товаров, не являющихся «болванами» для  $C$ .

**Следствие 7.3.3.** *Метод Шепли–Шубика является единственным методом в  $\mathcal{B}$  (DUM, ADD), удовлетворяющим LC.*

**Пример 2. Метод Аумана–Шепли.** Зафиксируем  $(I, C)$  и рассмотрим бинарную задачу (кооперативную игру) с  $x_I$  агентами, в которой каждая единица каждого товара  $i$  соответствует *одному* агенту, так что мы имеем  $x_i$  агентов типа  $i$ . Обозначим через  $I^x$  это новое множество агентов, а через  $\tilde{C}$  — функцию затрат на подмножествах  $I^x$ :

для любой  $S \subset I^x$   $\tilde{C}(S) = C(z)$ , где  $z_i$  — число агентов типа  $i$  в  $S$ .

Применим метод Шепли–Шубика к задаче  $(I^x, \tilde{C}, I^x)$  и суммируем (идентичные) доли затрат всех агентов типа  $i$ . Получающиеся доли затрат и определяют метод Аумана–Шепли.

Для любого вектора  $t$  из  $N^I$  (т.е.  $|I|$ -мерного вектора с натуральными координатами) будем обозначать через

$$\lambda(t) = \frac{(t_I)!}{\prod_{i \in I} t_i!}$$

число монотонных траекторий из  $0$  в  $t$  (в  $[0, t]$ ). Тогда метод Аумана–Шепли определяется следующим образом:

$$\varphi_i^{AS}(I, C, x) = \frac{1}{\lambda(x)} \sum_{t \in [0, x]} \lambda(t) \lambda(t') \cdot \left( \frac{t_i}{t_I} - \frac{t'_i}{t'_I} \right) C(t),$$

где  $t'_i = x_i - t_i$  ( $\lambda(0) = 0$ ).

Метод Аумана–Шепли представляется наиболее естественным продолжением пропорционального распределения затрат на случай неоднородных продуктов.

# Литература<sup>1</sup>

1. Ауман Р., Шепли Л. (1977). *Значения для неатомических игр*. М.: Мир. (М).
2. Бондарева О.Н. (1963). Некоторые приложения методов линейного программирования к теории кооперативных игр // *Проблемы кибернетики*. 10. 119–139.
3. Васильев В.А. (1984). *Модели экономического обмена и кооперативные игры*. Новосибирск: Изд-во НГУ.
4. Вилкас Э.Й. (1990). *Оптимальность в играх и решениях*. М.: Наука.
5. Вилков В.Б. (1974). *N*-ядро в кооперативных играх без побочных платежей // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 14. № 5. 1327–1331.
6. Воробьев Н.Н. (1984). *Основы теории игр: бескоалиционные игры*. М.: Наука. (М)
7. Воробьев Н.Н. (1985). *Теория игр для экономистов-кибернетиков*. М.: Наука. (У)
8. Гильдебранд В. (1986). *Ядро и равновесие в большой экономике*. М.: Наука. (М)

---

<sup>1</sup>Буквы М и У в скобках после названия обозначают, что указанное издание — монография или учебник соответственно. Список включает некоторые названия, не упомянутые в тексте.

9. Данилов В.И. (1981). Экономическое равновесие и обобщенные цены // *Исследования по стохастической теории управления и математической экономике*. М.: ЦЭМИ АН СССР. 25–42.
10. Данилов В.И., Сотсков А.И. (1983). Конкурентные равновесия в коалиционных играх // *Категории общественной полезности: вопросы методологии и структуризации*. М.: ЦЭМИ АН СССР. 147–167.
11. Данилов В.И., Сотсков А.И. (1987). Уравновешенные состояния и теоремы о ядре // *Оптимизация*. 41 (58). 36–49.
12. Дюбин Г.Н. (1988). О существовании значения Шепли // *Оптимизация*. 43 (60). 102–118.
13. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. (1981). *Введение в прикладную теорию игр*. М.: Наука. (У)
14. Мулен Э. (1985). *Теория игр с примерами из математической экономики*. М.: Мир. (У)
15. Мулен Э. (1991). *Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели*. М.: Мир. (У)
16. Наумова Н.И. (1971). О ядре со счетным числом игроков // *Доклады АН СССР*. Т. 197. № 1. 4–42.
17. Обен Ж.-П., Экланд И. (1988). *Прикладной нелинейный анализ*. М.: Мир.
18. Обен Ж.-П. (1988). *Нелинейный анализ и его экономические приложения*. М.: Мир.
19. Оуэн Г. (1971). *Теория игр*. М.: Мир. (У)
20. Партасаратхи Т., Рагхаван Т. (1974). *Некоторые вопросы теории игр двух лиц*. М.: Мир. (У)

21. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. (1998). *Теория игр*. М.: Высшая школа, Книжный дом "Университет". (У)
22. Петросян Л.А., Данилов Н.Н. (1985). *Кооперативные дифференциальные игры*. Томск: Изд-во Томского университета.
23. Печерский С.Л. (2000). Функции эксцесса для кооперативных игр без побочных платежей: аксиоматический подход // *Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии*. СПб.: Наука. 65–82.
24. Печерский С.Л., Соболев А.И. (1983). *Проблема оптимального распределения в социально-экономических задачах и кооперативные игры*. Л.: Наука. (М)
25. Печерский С.Л., Яновская Е.Б. (2000). Трансферабельные значения для игр с нетрансферабельными полезностями // *Экономические исследования: теория и приложения*. СПб.: Европейский университет в СПб. 310–349.
26. Полтерович В.М. (1997). Кризис экономической теории // *Труды семинара "Неизвестная экономика"*. Отделение экономики РАН. М.: ЦЭМИ РАН.
27. Розенмюллер И. (1974). *Кооперативные игры и рынки*. М.: Мир. (М)
28. Рокафеллар Р. (1973). *Выпуклый анализ*. М.: Мир.
29. Соболев А.И. (1975). Характеризация принципов оптимальности в кооперативных играх посредством функциональных уравнений // *Математические методы в социальных науках*. 6. Вильнюс. 94–151.
30. Соболев А.И. (1976). Нелинейные аналоги аксиоматики Шепли // *Современные направления теории игр*. Вильнюс: Мокслас. 119–126.

31. Соболев А.И. (1978). Нелинейные аналоги функции Шепли // *Теоретико-игровые вопросы принятия решений*. Л.: Наука. 9–18.
32. Сотсков А.И. (1985). Игры со смешанным участием игроков в коалициях // *Проблема равновесия и принятия экономических решений*. 52–58. М.: ЦЭМИ АН СССР.
33. Экланд И. (1983). *Элементы математической экономики*. М.: Мир. (У)
34. Яновская Е.Б. (1985). Аксиоматическая характеристика максиминного и лексикографически максиминного решения арбитражных схем // *Автоматика и телемеханика*. № 9. 128–136.
35. Aragonés E. (1995). A Derivation of the Money Rawlsian Solution // *Social Choice and Welfare*. 12. 267–276.
36. Arrow K. (1951). *Social Choice and Individual Values*. N.Y.: Wiley. (М)
37. Arrow K., Debreu G. (1954). Existence of Equilibrium for a Competitive Economy // *Econometrica*. 25. 265–290.
38. Aubin J.-P. (1979). *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*. Amsterdam: North-Holland. (М)
39. Aubin J.-P. (1981a) Cooperative Fuzzy Games // *Mathematics of Operations Research*. 6. 1–13.
40. Aubin J.-P. (1981b). Locally Lipschitz Cooperative Games // *Journal of Mathematical Economics*. 8. 241–262.
41. Aumann R.J. (1974). Subjectivity and Correlation in randomized strategies // *Journal of Mathematical Economics*. 1. 67–96.

42. Aumann R.J. (1985). An Axiomatization of the Non-Transferable Utility Value // *Econometrica*. 53. N 3. 667–678.
43. Aumann R.J. (1989). *Lectures on Game Theory*. San Francisco: Westview Press. (Y)
44. Aumann R.J. (1996). *Rationality and Bounded Rationality*. Nancy Schwartz Lecture, Kellog Foundation.
45. Aumann R.J. (1997). Introductory Remarks // *Cooperation: Game-Theoretic Approaches* / S.Hart, A.Mas-Colell (eds.). 155. Springer. 5–8. NATO ASI Series, Series F: Computer and Systems Sciences.
46. Aumann R.J., Maschler M. (1985). Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud // *Journal of Economic Theory*. 36. 195–213.
47. Aumann R.J., Shapley L.S. (1974). *Values for Non-Atomic Games*. Princeton University Press. (M)
48. Balinski M., Sgahidi M. (1997). *A Simple Approach to the Product Pate Variation Problem via Axiomatics*. Paris: Ecola Polytechnique (Mimeo).
49. Banks J.S., Sobel J. (1987). Equilibrium Selection in Signalling Games // *Econometrica*. 55. 647–661.
50. Banzhaf J. (1965). Weighted Voting Doesn't Work: a Mathematical Analysis // *Rutgers Law Review*. 317–343.
51. Baudier E. (1973). Competitive Equilibrium in a Game // *Econometrica*. 41. 1049–1068.
52. Baumol W., Panzar J., Willig B. (1982). *Contestable Markets and the Theory of Industry*. N.Y.: Harcourt Brace Jovanovich. (M)

53. Beja A., Gilboa I. (1990). Values for Two-Stage Games: Another View on the Shapley Axioms // *International Journal of Game Theory*. 19. 17–31.
54. Bernheim B.D. (1984). Rationalizable Strategic Behavior // *Econometrica*. 52. 1007–1028.
55. Bertrand J. (1883). Theorie mathematique de la richesse sociale // *Journal des Savants*. 499–508.
56. Billera L.J. (1972). *A Note on a Kernel and the Core for Games Without Side Payments*: Technical Report, 152 / Department of Operations Research. Cornell University, Ithaca. N.Y.
57. Billot A. (1992). *Economic Theory of Fuzzy Equilibria* // Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. V. 373.
58. Binmore K. (1987). Modeling Rational Players, I // *Economics and Philosophy*. 3. 179–214.
59. Binmore K. (1988). Modeling Rational Players, II // *Economics and Philosophy*. 4. 9–55.
60. Binmore K. (1990). *Essays on the Foundations of Game Theory*. Oxford: Basil Blackwell. (M)
61. Boehm V. (1974). The Core of an Economy with Production // *Review of Economic Studies*. 41. 429–436.
62. Bondareva O.N. (1989). *The Nucleolus of a Game Without Side Payment*. Working Paper N 176. Institute of Mathematical Economics. Bielefeld University, Germany.
63. Braithwaite R. (1955). *Theory of Games as a Tool for Moral Philosopher*. Cambridge University Press. (M)

- 64. Champsaur P. (1975). How to Share the Cost of a Public Good? // *International Journal of Game Theory*. 4. 113–129.
- 65. Chun Y. (1988). The proportional solution for rights problems // *Mathematical Social Sciences*. 15. 231–246.
- 66. Chun Y., Thomson W. (1990). *A consistent solution to claims problems*. University of Rochester (Mimeo).
- 67. Cornes R., Sandler T. (1986). *The Theory of Externalities. Public Goods and Club Goods*. Cambridge University Press. (M)
- 68. Cournot A. (1838). *Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Richesses*. Paris.
- 69. Dagan N. (1992). *Consistency and the Walrasian Allocations Correspondence*. Hebrew University of Jerusalem. September 1992 (Mimeo).
- 70. Dagan N. (1996). A Note on Thomson's Characterizations of the Uniform Rule // *Journal of Economic Theory*. 96. 255–261.
- 71. Dagan N., Volij O. (1994). *Bilateral comparisons and consistent fair division rules in the context of bankruptcy problems*. Hebrew University of Jerusalem. February 1994 (Mimeo).
- 72. Davis M., Maschler M. (1965). The Kernel of a Cooperative Game // *Naval Research Logistics Quarterly*. 12. 223–259.
- 73. Debreu G. (1952). A Social Equilibrium Existence Theorem // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 38. 886–893.
- 74. Debreu G. (1959). *Theory of Value*. N.Y.: Wiley. (M)

75. Diamond D., Dybvig P. (1983). Bank Runs, Deposit Insurance, and Liquidity // *Journal of Political Economy*. 91. 401–419.
76. Dixit A. (1980). The Role of Investment in Entry Deterrence // *Economic Journal*. 90. 95–106.
77. Dixit A., Nalebuff B. (1991). *Thinking Strategically: The Competitive Edge in Business, Politics and Everyday Life*. N.Y.: Norton. (M)
78. Driessen T. (1988). *Cooperative Games, Solutions and Applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. (M)
79. Dubey P. (1975). On the Uniqueness of the Shapley Value // *International Journal of Game Theory*. 4. 131–139.
80. Dubey P. (1980). Asymptotic Semivalues and a Short Proof of Kannai's Theorem // *Mathematics of Operations Research*. 5. 267–270.
81. Dubey P., Neyman A., Weber R. (1981). Value Theory without Efficiency // *Mathematics of Operations Research*. 6. 122–128.
82. Edgeworth F. (1897). La Theoria pura del monopolio // *Giornale degli Economisti*. 13–31.
83. Fan Ky (1952). Fixed Point and Minimax Theorem in Locally Convex Topological Linear Spaces // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 38. 121–126.
84. Fleurbaey F. (1995). *The Requisites of Equal Opportunity, in Social Choice, Welfare, and Ethics* / W.Barnett, H.Moulin, M.Salles, and N.Schofield (eds). Cambridge University Press. 37–53.
85. Fleurbaey F., Maniquet F. (1994). *Fair Allocation With Unequal Production Skills: the Solidarity Approach to*

- Compensation*. Universite de Cergy-Pontoise. December 1994 (Mimeo).
86. Friedman E., Moulin H. (1995). *Three Methods to Share Joint Costs (or Surplus)*. Duke University (Mimeo).
87. Friedman J.W. (1971). A Non-Cooperative Equilibrium for Supergames // *Review of Economic Studies*. 38. 1–12.
88. Friedman J.W. (1990). *Game Theory with Application to Economics*. 2-nd ed. Oxford University Press.
89. Fudenberg D., Kreps D. (1988). *Learning, Experimentation, and Equilibrium in Games*. Stanford University (Mimeo).
90. Fudenberg D., Kreps D. (1990). *Lectures on Learning and Equilibrium in Strategic Form Games*. CORE Lectures Series (Mimeo).
91. Fudenberg D., Levine D.K. (1998). *The Theory of Learning in Games*. Cambridge, MA: The MIT Press. (M)
92. Fudenberg D., Tirole J. (1991). *Game Theory*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press. (Y)
93. Fudenberg D., Tirole J. (1989). Noncooperative Game Theory for Industrial Organization: An Introduction and Overview // *Handbook of Industrial Organization* / R.Schmalensee and R.Willig (eds.). Elsevier Science Publishers.
94. Gevers L. (1986). Walrasian Social Choice: Some Simple Axiomatic Approaches // *Social Choice and Public Decision Making: Essays in honor of K. Arrow* / W.Keller et al. (eds.). V. 1. Cambridge University Press.
95. Gibbons R. (1992). *Game Theory for Applied Economists*. Princeton University Press.

96. Gillies D. (1953). *Some Theorems on  $n$ -Person Games*: Ph.D. thesis. Princeton University.
97. Gillies D. (1959). Solution to General Non-Zero Sum Games // *Annals of Mathematical Studies*. 40. 47–85. Princeton University Press.
98. Glicksberg I.L. (1952). A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem with Application of Nash Equilibrium points // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 38. 170–174. (Русский перевод статьи Гликсберга опубликован в сб.: Бесконечные антагонистические игры. Под ред. Н.Н.Воробьева. М.: Физматгиз, 1963. В русских переводах можно встретить две версии транскрипции Fan Ky: Фань Цзи (см., например, упомянутый выше сборник) и Ки Фань (см., например, Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988).)
99. Green J. (1983). *A Theory of Bargaining with Monetary Transfers*. HIER Discussion Paper, N 966.
100. Green J. (1991). *Compensatory Transfers in Group Decision Problems*. Working Paper. Department of Economics. Harvard University, March 1991.
101. Greenberg J. (1997). Situation Approach to Cooperation // *Game-Theoretic Approaches* / S.Hart, A.Mas-Colell (eds.). 155. 143–168. Springer. (NATO ASI Series. Series F: Computer and Systems Sciences.)
102. Gul F. (1989). Bargaining Foundations of Shapley value // *Econometrica*. 57 81–95.
103. Han K. (1952). Fixed Point and Minimax Theorem in Locally Convex Topological Linear Spaces // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 38. 121–126.

104. Hardin G. (1968). The Theory of the Commons // *Science*. 162. 1243–1248.
105. Harsanyi J.C. (1963). A Simplified Bargaining Model for N-person cooperative Games // *International Economic Review*. 4. 194–220.
106. Harsanyi J.C. (1967). Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players. Part I, II, III // *Management Science*. 14. 159–182, 320–334, 486–502.
107. Harsanyi J.C. (1973). Games with Randomly Distributed Payoffs: A New Rationale for Mixed Strategy Equilibrium Points // *International Journal of Game Theory*. 2. 1–23.
108. Hart S. (1985). An Axiomatization of Harsanyi's Non-Transferable Utility Solution // *Econometrica*. 53. N 6. 1295–1314.
109. Hart S., Mas-Colell A. (1989). Potential, Value and Consistency // *Econometrica*. 57. 589–614.
110. Hart S., Mas-Colell A. (1995). *Bargaining and Value*. Hebrew University of Jerusalem. Discussion Paper. N 66. January 1995.
111. Herrero C., Maschler M., Villar A. (1995). *Personal rights and collective ownership: the rights-egalitarian solution*. University of Alicante (Mimeo).
112. Ichiishi T. (1993). *The Cooperative Nature of the Firm*. Cambridge University Press. (M)
113. Kalai E. (1973). Excess Functions, Nucleolus, Kernel and  $\varepsilon$ -Core of Non-Sidepayments Cooperative Games // *Technical Report*. N 12. Department of Statistics. Tel-Aviv University.
114. Kalai E. (1975). Excess Functions for Cooperative Games Without Sidepayments // *SIAM Journal of Applied Mathematics*. 29. N 1. 60–71.

115. Kalai E. (1977). Non-Symmetric Nash Solutions and Replication of Two-Person Bargaining // *International Journal of Game Theory*. 6. 129–133.
116. M. Keane (1969). *Some Topics in N-Person Game Theory*. Thesis, Northwestern University. Evanston, Illinois.
117. Keiding H. (1986). An Axiomatization of the Core of a Co-operative Game // *Economics Letters*. 20. 111–115.
118. Koster R. de, Peters H., Tijs S., Wakker P. (1983). Risk Sensitivity, Independence of Irrelevant Alternatives and Continuity of Bargaining Solutions // *Mathematical Social Sciences*. 4. 295–300.
119. Kohlberg E. (1971). On the Nucleolus of a Characteristic Function Game // *SIAM Journal of Applied Mathematics*. 20. N 1. 62–66.
120. Kolpin V. (1994). *Coalitional Equitable Cost Sharing of Multi-Service Facilities*. University of Oregon, October 1994 (Mimeo).
121. Kreps D. (1990). *Game Theory and Economic Modelling*. Oxford: Clarendon Press. (M)
122. Kreps D.M. (1990). *A Course in Microeconomic Theory*. Princeton University Press. (Y)
123. Kreps D.M., Wilson R.B. (1982). Sequential Equilibrium // *Econometrica*. 50. 863–894.
124. Lensberg T. (1988). Stability and the Nash Solution // *Journal of Economic Theory*. 45. 330–341.
125. Littlechild S.C., Owen G. (1973). A Simple Expression for the Shapley Value in a Special Case // *Management Science*. 20. 370–372.

126. Mailath G.J. (1998). Do People Play Nash Equilibrium? Lessons From Evolutionary Game Theory // *Journal of Economic Literature*. XXXVI (September 1998). 1347–1374.
127. Maniquet F. (1996). Horizontal Equity and Stability When the Number of Agents is Variable in the Fair Division Problem // *Economics Letters*. 50. 85–90.
128. Maschler M. (1992). The Bargaining Set, Kernel, and Nucleolus [Chapter 18] // *Handbook of Game Theory* / R. Aumann and S. Hart (eds.). Elsevier.
129. Maschler M., Owen G. (1989). The Consistent Shapley Value for Hyperplane games // *International Journal of Game Theory*. 18. 389–407.
130. Maschler M., Owen G. (1992). The consistent Shapley value for games without side-payments // *Rational Interactions* / R. Selten (ed.). Springer-Verlag. 5–12.
131. Maschler M., Peleg B. (1966). A Characterization, Existence Proof and Dimension Bounds for the Kernel of a Game // *Pacific Journal of Mathematics*. 18. 289–328.
132. Maschler M., Peleg B. (1967). The Structure of the Kernel of a Cooperative Game // *SIAM Journal for Applied Mathematics*. 15. 569–604.
133. Maschler M., Peleg B. , Shapley L. (1972). The Kernel and the Bargaining Set for Convex Games // *International Journal of Game Theory*. 1. 73–93.
134. Maschler M., Peleg B. , Shapley L. (1979). Geometric Properties of the Kernel, Nucleolus and Related Solution Concepts // *Mathematics of Operations Research*. 4. 303–338.
135. Mas-Colell A. (1980). Efficiency and Decentralization in the Pure Theory of Public Goods // *The Quarterly Journal of Economics*. XCIV. 4. 625–641.

136. Mas-Colell A. (1997). Bargaining Games // *Game-Theoretic Approaches* / 155. Springer. 69–90. S.Hart, A.Mas-Colell (eds.). (NATO ASI Series, Series F: Computer and Systems Sciences).
137. Mas-Colell A., Silvestre J. (1989). Cost Share Equilibria: A Lindahlian Approach // *Journal of Economic Theory*. 47. 239–256.
138. Mas-Colell A., Silvestre J. (1991). A Note on Cost-Share Equilibrium // *Journal of Economic Theory*. 54. 204–214.
139. Mas-Colell A., Whinston M., Green J. (1995). *Microeconomic Theory*. Oxford University Press. (Y)
140. Maynard Smith J. (1974). The Theory of Games and Evolution in Animal Conflicts // *Journal of Theoretical Biology*. 47. 209–221.
141. Maynard Smith J. (1982). *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge University Press. (M)
142. Maynard Smith J., Price G.R. (1973). The Logic of Animal Conflict // *Nature*. 246. 15–18.
143. McKenzie L.W. (1954). On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems // *Econometrica*. 22. N 1.
144. McLean R., Sharkey W. (1992). *Alternative Methods for Cost Allocation in Stochastic Service Systems*. Rutgers University (Mimeo).
145. McLean R.P., Postlewaite A. (1989). Excess Functions and Nucleolus Allocation of Pure Exchange Economies // *Games and Economic Behavior*. 1. 131–143.
146. Milgrom P., Roberts J. (1982). Limit Pricing and Entry under Incomplete Information // *Econometrica*. 50. 443–460.

147. Milgrom P., Roberts J. (1991). Adaptive and Sophisticated Learning in Normal Form Games // *Games and Economic Behavior*. 3. 82–100.
148. Moulin H. (1983). *The Strategy of Social Choice*. Advanced Textbooks in Economics. N 18. Amsterdam: North-Holland. (Y)
149. Moulin H. (1985). The separability axiom and equal sharing methods // *J. of Economic Theory*. 36. 120–148.
150. Moulin H. (1985a). Egalitarianism and Utilitarianism in Quasi-Linear Bargaining // *Econometrica*. 53. 49–67.
151. Moulin H. (1986). *Game Theory for Social Sciences*. N.Y.: University Press. (Y)
152. Moulin H. (1987). A Core Selection for Pricing a single output monopoly // *Rand Journal of Economics*. 18(3). 397–407.
153. Moulin H. (1987). Equal or proportional division of a surplus and other methods // *International Journal of Game Theory*. 16. N 3. 161–186.
154. Moulin H. (1995). On Additive Methods to Share Joint Costs // *Japanese Economic Review*. 46. 4. 303–332.
155. Moulin H. (1995). *Cooperative Microeconomics: a Game Theoretic Introduction*. Princeton University Press; Prentice-Hall. (Y)
156. Moulin H. (1996). *Incremental Cost Sharing: Characterization by Coalition Strategy-Proofness*. Discussion Paper. Department of Economics. Duke University. March 1996.
157. Moulin H. (1999). *Axiomatic Cost and Surplus-Sharing* [Chapter] // *the Handbook of Social Choice and Welfare* / K. Arrow, A. Sen, T. Suzumura (eds.). Working paper. Duke University, March.

158. Moulin H., Shenker S. (1994). Average Cost Pricing Versus Serial Cost Sharing: an Axiomatic Comparison // *Journal of Economic Theory*. 64. 178–201.
159. Myerson R. (1981). Utilitarianism, Egalitarianism and the Timing Effect in Social Choice Problem // *Econometrica*. 49. N 2. 883–897.
160. Myerson R. (1991). *Game Theory: Analysis of Conflict*. Harvard University Press. (Y)
161. Nagahisa R. (1991). A Local Independence Condition for Characterization of Walras Allocation Rule // *Journal of Economic Theory*. 54. 106–123.
162. Nash J.F. (1950). The Bargaining Problem // *Econometrica*. 28. 155–162.
163. Neumann J. von (1928). Zur Theorie der Gesellschaftsspiele // *Mathematical Annals*. Bd. 100. 295–320. (Русский перевод статьи Дж. фон Неймана опубликован в сб.: Матричные игры. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.)
164. Neumann J. von, Morgenstern O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press. (Русский перевод: Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. Теория игр и экономическое поведение, М.: Наука, 1970.) (M)
165. Neyman A. (1977). Continuous Values Are Diagonal // *Mathematics of Operations Research*. 2. 338–342.
166. O'Neil B. (1982). A Problem of Rights Arbitration from the Talmud // *Mathematical Social Science*. 2. 345–371.
167. Ordeshook P. (ed.) (1978). *Game Theory and Political Theory*. N.Y. (M)
168. Ordeshook P. (1986). *Game Theory and Political Theory: An Introduction*. Cambridge University Press.

169. Ordeshook P. (1992). *A Political Theory Primer*. N.Y.; London: Routledge.
170. Osborne M., Rubinstein A. (1994). *A Course in Game Theory*. The MIT Press. (Y)
171. Owen G. (1972). Multilinear Extension of Games // *Management Sciences*. 18. 64–79.
172. Owen G. (1975). Multilinear Extensions and the Banzhaf value // *Naval Research Logistics Quarterly*. 22. N 4. 741–750.
173. Pechersky S. (1986). Positively Homogeneous Quasidifferentiable Functions and their Applications in Cooperative Game Theory // *Mathematical Programming Study*. 29. 135–144.
174. Pechersky S., Rubinov A. (1993). Solution Concept for Generalized Multi-Stage Games Without Side Payments // *Journal of Mathematical Economics*. 25. 403–420.
175. Pechersky S., Sobolev A. (1995). Set-Valued Nonlinear Analogues of the Shapley Value // *International Journal of Game Theory*. 24. 57–78.
176. Peleg B. (1985). An Axiomatization of the Core of Cooperative Games Without Side-Payments // *Journal of Mathematical Economics*. 14. 203–214.
177. Peleg B. (1986). On the Reduced Game Property and its Converse // *International Journal of Game Theory*. 15. 187–200.
178. Peleg B. (1992). *Axiomatizations of the Core* [Chapter 13] // *Handbook of Game Theory*. R. Aumann and S. Hart (eds.). Elsevier. 398–412.
179. Peleg B., Tijs S. (1996). The Consistency Principle for Games in Strategic Form // *International Journal of Game Theory*. 25. 13–34.

180. Peters H. (1985). A Note on Additive Utility and Bargaining // *Economics Letters*. 17. 219–222.
181. Peters H. (1986). Simultaneity of Issues and Additivity in Bargaining // *Econometrica*. 54. N 1. 153–169.
182. Rabin M. (1988). *Consistency and robustness Criteria in Game Theory*. MIT Press (Mimeo).
183. Rasmussen E. (1989). *Games and Information: An Introduction to Game Theory*. Oxford: Basil Blackwell. (У)
184. Rawls J. (1971). *A Theory of Justice*. Harvard University Press. (Русский перевод: Дж. Ролз. Теория справедливости, Новосибирск: Изд-во НГУ, 1995). (М)
185. Reny P. (1997). Two Lectures on Implementation Under Complete Information: General Results and the Core // *Game-Theoretic Approaches*, S.Hart, A.Mas-Colell (eds.). 155. Springer. 91–114. (NATO ASI Series, Series F: Computer and Systems Sciences).
186. Riker W. (1962). *The Theory of Political Coalitions*. New Haven. (М)
187. Riker W., Ordeshook P. (1973). *Introduction to Positive Political Theory*. New Jersey: Prentice-Hall.
188. Roemer J. (1986a). The Mismatch of Bargaining Theory and Distributive Justice // *Ethics*. 97. 88–110.
189. Roemer J. (1986b). Equality of Resources Implies Equality of Welfare // *Quarterly Journal of Economics*. 101. 751–784.
190. Rosenmuller J. (1977). Extreme Games and Their Solutions // *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. 145.

191. Rosenthal E.C. (1990). Monotonicity of the Core and Value in Dynamic Cooperative Games // *International Journal of Game Theory*. 19. 35–57.
192. Roth A. (1979). Axiomatic Models of Bargaining // *Lecture Notes in Economic and Mathematical Systems*. 170. Springer Verlag. (M)
193. Rubinstein A. (1982). Perfect Equilibrium in a Bargaining Model // *Econometrica*. 50. 97–109.
194. Rubinstein A. (1998). *Modeling Bounded Rationality*. Cambridge, MA: The MIT Press (M).
195. Ruiz L.M. , Valenciano F., Zurzuelo J.M. (1998). The Family of Least Square Values for Transferable Utility Games // *Games and Economic Behavior*. 24. 109–130.
196. Scarf H. (1967). The Core of an  $N$  person game // *Econometrica*. 35. 50–69.
197. Schmeidler D. (1969). The Nucleolus of a Characteristic Function Game // *SIAM Journal of Applied Mathematics*. 17. 1163–1170.
198. Selten R. (1965). Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachgetragtheit // *Zeitschrift für die Gesamte Staatswissenschaft*. 121. 301–324.
199. Selten R. (1975). Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games // *International Journal of Game Theory*. 4. 25–55.
200. Sen A. (1970). *Collective Choice and Social Welfare*. San Francisco: Holden Day. (M)
201. Sen A., Williams B. (eds.) (1982). *Utilitarianism and Beyond*. Cambridge University Press.

202. Shapley L. (1953). A value for n-person games // *Contributions to the Theory of Games II* / H. W. Kuhn, A. W. Tucker (eds.). Princeton University Press. 307–317. (Annals of Mathematical Studies. 28).
203. Shapley L. (1967). On Balanced Sets and Cores // *Naval Research Logistics Quarterly*. 14. 453–460.
204. Shapley L. (1969). Utility Comparison and the Theory of Games / *La Decision: Agregation et dynamique des orders de preference*. Paris. 251–264.
205. Shapley L. (1971). Cores of Convex Games // *Int. Journal of Game Theory*. 1. N 1. 11–26.
206. Shapley L. (1973). On Balanced Games without side payments // *Mathematical Programming: Proceedings of Advances Seminar*. Madison, 1972. 261–290.
207. Shapley L., Shubik M. (1963). *The Core of an Economy with Nonconvex Preference*. RM-3518. The Rand Corporation, Santa Maria, USA.
208. Shapley L., Shubik M. (1966). Quasi-cores in a Monetary Economy with Nonconvex Preferences // *Econometrica*. 34. 805–827.
209. Shapley L., Shubik M. (1969). On Market Games // *Journal Economic Theory*. 1. 9–25.
210. Sharkey W. (1982). Cooperative Games with Large Cores // *International Journal of Game Theory*. 11. 175–182.
211. Shelling T.C. (1960). *The Strategy of Conflict*. Harvard University Press.
212. Shubik M. (1962). Incentive, Decentralized Control, the Assignment of joint Costs and Internal Pricing // *Management Science*. 8. N 3. 325–343.

213. Shubik M. (1984). *Game Theory in the Social Sciences*. Princeton University Press. (M)
214. Simon H.A. (1955). A Behavioral Model of Rational Choice // *Quarterly Journal of Economics*. 69. 99–118.
215. Simon H.A. (1956). Rational Choice and the Structure of the Environment // *Psychological Review*. 63. 129–138.
216. Simon H.A. (1972). Theories of bounded Rationality / *Decision and Organization*. / C.B. McGuire and R. Radner (eds.). Amsterdam: North-Holland. 161–176.
217. Simon H.A. (1973). From Substantive to Procedural Rationality // *Methods and Appraisal Economics*. / S.J. Laties (ed.). Cambridge University Press. 129–148.
218. Sonmez T. (1994). Consistency, Monotonicity and the Uniform Rule // *Economics Letters*. 46. 229–235.
219. Spence A.M. (1974). *Market Signalling*. Harvard University Press. (M)
220. Straffin P., Heaney J. (1981). Game Theory and the Tennessee Valley Authority // *International Journal of Game Theory*. 10. 35–43.
221. Swan A. de (1973). *Coalition Theories and Cabinet Formations*. Amsterdam: North-Holland.
222. Tadenuma K., Thomson W. (1991). No-envy and Consistency in Economies with Indivisible Goods // *Econometrica*. 59. 1755–1767.
223. Tadenuma K., Thomson W. (1993). The Fair Allocation of an Indivisible Good when Monetary Compensations are Possible // *Mathematical Social Sciences*. 25. 117–132.

- 224. Tadenuma K., Thomson W. (1995). Refinements of the No-envy Solution in Economies With Indivisible Goods // 39. 189–206.
- 225. Tauman (1988). The Aumann-Shapley prices: a survey // in *The Shapley value: Essays in Honor of Lloyd Shapley* / A.E. Roth (ed.). Cambridge University Press. 279–304.
- 226. Thomson W. (1988). A study of choice correspondences in economies with a variable number of agents // *Journal of Economic Theory*. 46. 247–259.
- 227. Thomson W. (1994). Consistent solutions to the problem of fair division when preferences are single-peaked // *Journal of Economic Theory*. 63. 219–245.
- 228. Thomson W. (1995). *The axiomatic analysis of bankruptcy and taxation problems*. Discussion Paper. University of Rochester.
- 229. Thomson W., Lensberg T. (1992). *The Theory of Bargaining with a Variable Number of Agents*. Cambridge University Press. (M)
- 230. Tirole J. (1988). *The Theory of Industrial Organization*. Cambridge: The MIT Press. (Имеется русский перевод: Ж.Тироль. Рыночная власть: теория организации промышленности. СПб.: Экономическая школа, 2000). (У)
- 231. Van Deemen Ad.M.A. (1997). *Coalition Formation and Social Choice*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. (M)
- 232. Van den Nouweland A., Peleg B., Tijs S. (1996). Axiomatization of the Walras Correspondence for Generalized Economies // *Journal of Economic Theory*. 25. N 3. 355–372.

- 233. Van den Nouweland A., Tijs S., Wooders M. (1995). *Axiomatizations of Lindhal and Ratio Equilibria in Public Good Economies*. Department of Econometrics. Tilburg University. (Mimeo).
- 234. Vasil'ev V.A., Weber S., Wiesmeth H. (1995). Core Equilibrium with Congested Public Goods // *Economic Theory*. 6. N 3. 373–387.
- 235. Vohra R. (1997). Coalitional Non-Cooperative Approaches to Cooperation // *Cooperation: Game-Theoretic Approaches* / S.Hart, A.Mas-Colell (eds.). 155. Springer. 127–142. (NATO ASI Series, Series F: Computer and Systems Sciences.)
- 236. Wang Y. T. (1998). The Additivity and Dummy Axioms in the Discrete Cost Sharing Model // *Economic Letters*.
- 237. Weber R. (1988). Probabilistic Values for Games // *The Shapley Value (Essays in Honor of Lloyd S. Shapley)* / A.E.Roth (ed.). Cambridge University Press. 101–119.
- 238. Weber S., Wiesmeth H. (1991). The Equivalence of Core and Cost Share Equilibria in an Economy with a Public Good // *Journal of Economic Theory*. 54. 180–197.
- 239. Weibull J.W. (1995). *Evolutionary Game Theory*. Cambridge: The MIT Press. (Y)
- 240. Yanovskaya E. (1997). Consistency Properties of the Non-transferable Cooperative Game Solution // *Game Theoretical Applications to Economics and Operation Research* / T.Parthasarathy et al. (eds.). Kluwer Academic Publishers. 67–84.
- 241. Yanovskaya E. (1997a). Set-Valued Analogues of the Prenucleolus // *Game Theory and Applications*. 3 / L.Petrosjan, V.Mazalov (eds.). N.Y.: Nova Science Publishers. 161–175.

- 242. Young H. P. (1985). Producer Incentives in Cost Allocation // *Econometrica*. 53. 575–565.
- 243. Young H. P. (1986). *Taxation and bankruptcy*. University of Maryland. July 1986. (Mimeo).
- 244. Young H. P. (1987). On Dividing an Amount According to Individual Claims or Liabilities // *Mathematics of Operations Research*. 12. 398–414.
- 245. Young H. P. (1988). Distributive justice in taxation // *Journal of Economic Theory*. 48. 321–335.
- 246. Young P. (1990). Progressive Taxation and equal sacrifice // *American Economic Review*. 30. N 1. 253–266.
- 247. Young P. (1994). *Equity: how groups divide goods and burdens among their members*. Princeton University Press. (M)
- 248. Zadeh L. (1965). Fuzzy Sets // *Information and Control*. 8. 338–353.